СОФИЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА "ЗА ТОРТАТА НА ДИРЕКТОРА"

ТЕМА ПО **МАТЕМАТИКА**
9 КЛАС

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с медицентър G, център на описаната окръжност O и център на вписаната окръжност I. Точките M и N са средите на страните AC и BC, съответно. Известно е, че върху височината CH ($H \in AB$) съществува точка R, такава че $\angle MRN = \angle ARB = 90^\circ$. Да се докаже, че точките M, I, O и N лежат на една окръжност тогава и само тогава когато точките R, I и G лежат на една права.

Задача 2. Нека a, b и c са дължини на страни на триъгълник. Да се докаже неравенството

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\geq 1.$$

Задача 3. Ще наричаме (a,b)-*кон* фигура, която може да се движи a полета в едното направление и b в другото на шахматна дъска (например, познатият шахматен кон е $(1,2)$-кон). Дадени са естествените числа m, p и q, такива че $m \leq p \leq 2m$ и $m \leq q \leq 2m$. Да се докаже, че не съществува естествено число n, за което (p,q)-кон може да направи обиколка на дъска $4m \times n$, така че да мине през всяко поле точно веднъж и да се върне в полето, от което е тръгнал.

Задача 4. Да се намерят всички естествени числа $n \geq 5$, за които n дели $2^{(n-5)!}-1$.

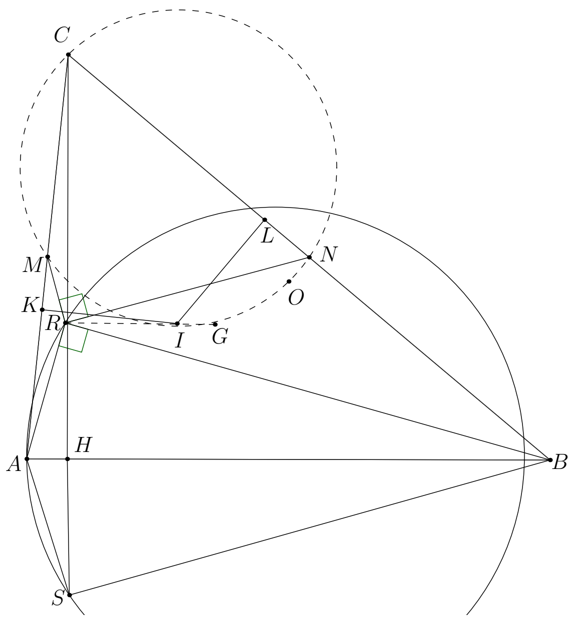
Задача 5. Реалните числа a, b, c, p и q изпълняват равенствата $a+b+c=p$ и $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=q$. Да се представи чрез p и q стойността на израза

$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$$

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$, в който M и N са съответно средите на AC и BC, а I е центърът на вписаната окръжност. Правите MN и BI се пресичат в точка E. Точката P е такава, че $PE \perp MN$ и $AI \parallel PN$. Да се докаже, че $PI \perp BC$.

РЕШЕНИЯ:

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с медицентър G, център на описаната окръжност O и център на вписаната окръжност I. Точките M и N са средите на страните AC и BC, съответно. Известно е, че върху височината CH ($H \in AB$) съществува точка R, такава че $\angle MRN = \angle ARB = 90°$. Да се докаже, че точките M, I, O и N лежат на една окръжност тогава и само тогава когато точките R, I и G лежат на една права.



Решение. Ясно е, че R лежи между правите MN и AB. Тогава ако точката S е симетрична на C относно R, то тя лежи извън $\triangle ABC$ и

$$\angle ASB = \angle ASR + \angle BSR = \angle MRC + \angle NRC = 90°$$

което заедно с $\angle ARB = 90°$ дава, че четириъгълникът $ASBR$ е вписан. Тогава $\angle ABR = \angle ASR = \angle MRC = \angle MNR$ (последното е понеже MN е перпендикулярна на височината), така $\triangle ABR \sim \triangle NMR$ и разглеждайки съответните височини, от $AB = 2MN$ лесно получаваме $CR = 2RH$, където H е проекцията на C върху AB. От теоремата на Талес следва, че $RG \parallel AB$. Остава да докажем, че M, I, O и N са на една окръжност точно когато $IG \parallel AB$. Нека T е петата на ъглополовящата през C. Отново от теоремата на Талес имаме $CI = 2IT$. Сега свойството на ъглополовящата лесно дава еквивалентното $AC + BC = 2AB$. От друга страна, ако $IK \perp AC$, $IL \perp BC$, то

$$AC + BC = 2AB \Leftrightarrow MK = NL \Leftrightarrow \triangle IKM \cong \triangle INL \Leftrightarrow IM = IN$$

като последното е изпълнено точно когато C, I, M и N са на една окръжност, а това е еквивалентно на I, O, M и N да са на една окръжност. С това задачата е решена.

Оценяване. За разглеждане на точката S – **2 точки**; За $\triangle ABR \sim \triangle NMR$ – **2 точки**; За $RG \parallel AB$ – **1 точка**; За свеждане на успоредността до $AC+BC = 2AB$ – **1 точка**; За $MK = NL$ – **2 точки**; Довършване – **2 точки**.

Задача 2. Нека a, b и c са дължини на страни на триъгълник. Да се докаже неравенството

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\geq 1.$$

Решение. Имаме последователно

$$4\sum_{cyc}\frac{a}{3a-b+c}=\sum_{cyc}\frac{4a}{3a-b+c}=3+\sum_{cyc}\frac{a+b-c}{3a-b+c}=3+\sum_{cyc}\frac{(a+b-c)^2}{(3a-b+c)(a+b-c)}.$$

Прилагаме Хубавото неравенство по следния начин:

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b-c)^2}{(3a-b+c)(a+b-c)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}(3a-b+c)(a+b-c)}=1.$$

Равенство се достига при $a=b=c$.

Оценяване. Подходящо преобразувание – **5 точки**; Прилагане на подходящо неравенство – **3 точки**; Довършване – **2 точки**; Случай на равенство – **0 точки**.

Задача 3. Ще наричаме (a,b)-*кон* фигура, която може да се движи a полета в едното направление и b в другото на шахматна дъска (например, познатият шахматен кон е $(1,2)$-кон). Дадени са естествените числа m, p и q, такива че $m\leq p\leq 2m$ и $m\leq q\leq 2m$. Да се докаже, че не съществува естествено число n, за което (p,q)-кон може да направи обиколка на дъска $4m\times n$, така че да мине през всяко поле точно веднъж и да се върне в полето, от което е тръгнал.

Решение. Да допуснем противното – за някои m,p,q, отговарящи на условието, има такава затворена обиколка. Ще наричаме две полета *съседни*, ако са последователни в обиколката. Да оцветим полетата на дъската $4m\times n$ шахматно. Да отделим горните m и долните m реда. Нека с A означим множеството от всички бели полета в тези редове. Лесно се вижда, че $|A|=mn$. Но да забележим, че при всеки ход на (p,q)-кон или отиваме винаги в поле с друг цвят (при $p+q$ нечетно), или винаги в поле със същия цвят (при $p+q$ четно). Следователно всички съседни на полетата от множеството A са едноцветни, тъй като полетата в A са едноцветни. Нещо повече – тъй като $m\leq p\leq 2m, m\leq q\leq 2m$, следва че съседните на полетата в множеството A са измежду полетата в останалите $2m$ реда. Следователно ако множеството на всички съседни на полета от A е B, то $|B|\leq mn$. Но в обиколката всяко поле има по 2 съседа, тоест множеството от съседни на A е с големина поне $2\frac{|A|}{2}=|A|=mn$. Заключаваме, че $|B|=mn$. Но от тук лесно се вижда, че всяко поле от A има 2 съседа в B и всяко от B има 2 съседа в A. Тогава и B образуват затворен цикъл, което е противоречие, понеже не могат да участват в обиколка с останалите полета.

Оценяване. Въвеждане на шахматно оцветяване - **3 точки**; Отделяне на двете множества - **4 точки**; Довършване - **3 точки**. Опит за конструкция с друго оцветяване се оценява с до **1 точка** в зависимост от това дали то може да бъде сведено до шахматно.

Задача 4. Да се намерят всички естествени числа $n \geq 5$, за които n дели $2^{(n-5)!} - 1$.

Решение. **Отговор.** Всички нечетни $n \geq 9$. Ясно е, че n е нечетно. Ако $\varphi(n) \leq n-5$, то тъй като по теоремата на Ойлер n дели $2^{\varphi(n)} - 1$, оттук дели и $2^{(n-5)!} - 1$. Така, понеже $\varphi(n)$ е четно, остава да изключим числата с $\varphi(n) = n-3$ или $\varphi(n) = n-1$, които не изпълняват условието.

В първия случай имаме $n \geq 9$. Тогава числата 2 и $\frac{n-3}{2}$ са различни и по-малки или равни на $n-5$, т.е. се съдържат в произведението $(n-5)!$. От теоремата на Ойлер имаме, че n дели $2^{n-3} - 1$, а оттук и $2^{(n-5)!} - 1$.

Във втория случай n е просто. Числата $n = 5$ и $n = 7$ не изпълняват условието. При $n \geq 11$ числата 2 и $\frac{n-1}{2}$ са различни и по-малки или равни на $n-5$, т.е. се съдържат в произведението $(n-5)!$. Отново от теоремата на Ойлер (Ферма) имаме, че n дели $2^{n-1} - 1$, а оттук и $2^{(n-5)!} - 1$.

Оценяване. За n – нечетно и разглеждане на $\varphi(n)$ – **1 точка**; За случая $\varphi(n) \leq n-5$ – **2 точки**; За отхвърляне на $\varphi(n) = n-4$ и $n-2$ – **2 точки**; За доказване на $n \geq 9$ като решения във всеки от двата случая – **по 2 точки**; За верен отговор – **1 точка**

Задача 5. Реалните числа a, b, c, p и q изпълняват равенствата $a+b+c = p$ и $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = q$. Да се изрази чрез p и q израза $\dfrac{c}{a+b} + \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a}$.

Решение. Да положим $a+b = x$, $b+c = y$ и $c+a = z$. Тогава

$$a = \frac{x+z-y}{2}, \quad b = \frac{x+y-z}{2}, \quad c = \frac{y+z-x}{2}.$$

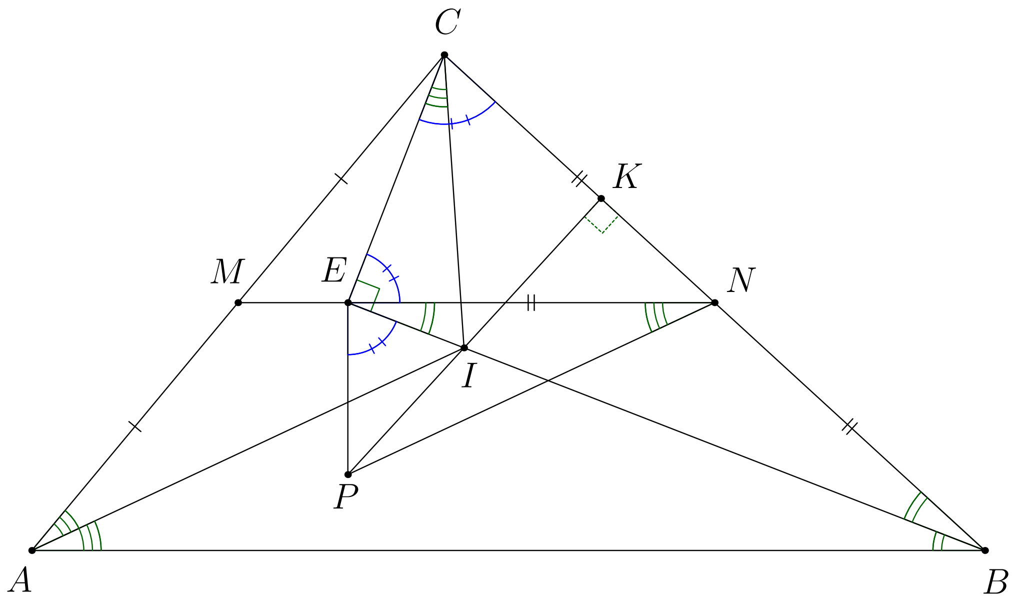
Равенствата от условието се преобразуват до $x+y+z = 2p$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = q$.

Заместваме в търсения израз и получаваме:

$$\begin{aligned}
&\frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{z} - 6\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big((x+y+z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) - 6\Big) = \\
&= \frac{1}{2}(2pq - 6) = pq - 3
\end{aligned}$$

Оценяване. За полаганията $a+b = x$, $b+c = y$ и $c+a = z$ – **3 точки**; За изразяване на a, b и c – **2 точки**; За довършване – **5 точки**; Отговор - **0 точки**.

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$, в който M и N са съответно средите на AC и BC, а I е центърът на вписаната окръжност. Правите MN и BI се пресичат в точка E. Точката P е такава, че $PE \perp MN$ и $AI \parallel PN$. Да се докаже, че $PI \perp BC$.



Решение. Нека $PI \cap BC = K$. Ще покажем, че $\angle PKC = 90°$. За ъглите на $\triangle ABC$ ще използваме стандартни означения. От $MN \parallel AB$ следва $\angle BEN = \dfrac{\beta}{2}$. Тогава $EN = NB = CN$, откъдето следва, че N е центърът на описаната около $\triangle BEC$ окръжност и $\angle BEC = 90°$. Тогава $\angle NEC = \angle ECN = \angle PEN = 90° - \dfrac{\beta}{2}$. От друга страна $\angle ICB = \dfrac{\gamma}{2}$ и така $\angle ECI = \dfrac{\alpha}{2}$. Също така $\angle PNE = \dfrac{\alpha}{2}$, защото $AB \parallel MN$ и $PN \parallel AI$. Сега имаме $\triangle CEI \sim \triangle NEP$, откъдето $\dfrac{CE}{EN} = \dfrac{EI}{EP}$. Последното равенство е еквивалентно на $\dfrac{EC}{EI} = \dfrac{EN}{EP}$ и $\angle PEI = \angle NEC$, откъдето следва $\triangle EPI \sim \triangle ENC$. Обаче $\triangle ECN$ е равнобедрен и $EN = CN$. Следователно $EP = PI$ и оттук $\angle PEI = \angle PIE = \angle ECK$. Така получаваме $\angle ECK + \angle KCI = 180°$. От сбор на ъглите в четириъгълник $KCEI$ получаваме $\angle IKC = 90°$.

Оценяване. Извеждане на $\angle BEC = 90°$ - **2 точки**; За първото подобие - **2 точки**; За второто подобие - **3 точки**; Довършване - **3 точки**;