СОФИЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА "ЗА ТОРТАТА НА ДИРЕКТОРА"

ТЕМА ПО **МАТЕМАТИКА**
8 КЛАС

Задача 1. Да се реши в цели числа уравнението $pa(a+b) = (5a+b)^2$, където p е просто.

Задача 2. Дадени са естествени числа k и n, като $k \leq n$. Реалните неотрицателни числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са със сума A. Да се намери най-голямата възможна стойност на израза

$$x_1x_2\ldots x_k + x_2x_3\ldots x_{k+1} + \ldots + x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n$$

и да се определят всички случаи, в които тя се достига.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ и вписаната му окръжност ω, която допира страните AB, BC и CA в точките M, F и E съответно. Нека N е другата пресечна точка на CM и ω. Прекарана е права l през върха C, успоредна на AB. Пресечните точки на l с правите ME и MF са P и Q съответно. Да се докаже, че $\angle ENF = \angle PNQ$.

Задача 4. Дадено е естествено число n. Всяка от четирите страни на квадрат е оцветена в точно един от n различни цвята. Да се намери броят на различните възможни оцветявания (с точност до ротации и отражения).

Задача 5. Съществува ли двойка (a, b) от различни реални числа, за които са изпълнени равенствата $a^3 - a^2 = b^3 - b^2$ и $3a^4 - 4a^3 = 3b^4 - 4b^3$?

Задача 6. За естествено число a с $s(a)$ ще означаваме сумата от цифрите му в десетичния запис. Да се намери минималната възможна стойност на $\frac{a}{s(a)}$, където a е шестцифрено число.

РЕШЕНИЯ:

Задача 1. Да се реши в цели числа уравнението $pa(a+b) = (5a+b)^2$, където p е просто.

Решение. Ако $a = 0$, то $b = 0$ и за всяко просто p имаме $(a; b) = (0; 0)$. Ако $b = 0$, то $pa^2 = 25a^2$, което няма решение за p при $a \neq 0$. Ако поне едно от a и b е равно на 0, то и другото е 0.

Да допуснем, че за някое нечетно просто p има решение $(a; b)$, за което $ab \neq 0$. Нека $d = (a; b)$, откъдето $a = dx$ и $b = dy$, като $(x, y) = 1$. Тогава уравнението от условието е еквивалентно на $px(x+y) = (5x+y)^2$. Понеже p дели $5x+y$, то и p^2 дели $(5x+y)^2$. Тогава p^2 дели $px(x+y)$, откъдето p дели $x(x+y)$. Ако p дели x, то p дели и y, защото $5x+y$ се дели на p. Тогава p дели $x+y$, откъдето p дели $4x$ и така p дели x. Тогава p дели и y. И в двата случая p дели (x, y), което е противоречие.

При $p = 2$ уравнението от условието е еквивалентно на $(4a+b)^2 + 7a^2 = 0$. Единственото му решение е $(a; b) = (0; 0)$. Така за всяко просто p решенията са $(a; b) = (0; 0)$

Оценяване. Решение за $p = 2$ - **2 точки**; Доказателство, че p дели a и b при нечетно p - **6 точки**; Довършване - **2 точки**.

Задача 2. Дадени са естествени числа k и n, като $k \leq n$. Реалните неотрицателни числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са със сума A. Да се намери най-голямата възможна стойност на израза

$$x_1x_2\ldots x_k + x_2x_3\ldots x_{k+1} + \ldots + x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n$$

и да се определят всички случаи, в които тя се достига.

Решение. Лесно се вижда, че ако $n > k$ и заменим x_1 с 0, а x_{k+1} с $x_1 + x_{k+1}$, то стойността на израза не намалява. Нещо повече – тя остава същата само ако $x_1x_{k+1} = 0$ е било вярно преди замяната. Но чрез това наблюдение получаваме, че можем да намаляме броя на променливите като не намаляваме стойността на израза, докато стигнем до случая $n = k$. Достигайки до него сме получили неотрицателните числа $y_1, y_2, \ldots, y_k$, като $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = A$ (сумата очевидно се запазва при замяната). От САСГ сега получаваме

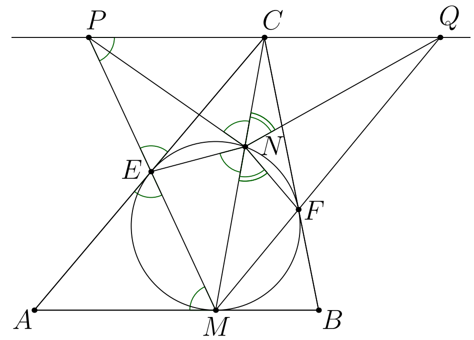
$$y_1y_2\cdots y_k \leq \left(\frac{A}{k}\right)^k$$

Поради вида на замените и използването на САСГ, равенство очевидно се достига, когато някои k последователни числа са равни на $\frac{A}{k}$, а останалите са равни на 0.

Оценяване. Идея за замяна на променливите - **5 точки**; Прилагане на САСГ или еквивалентно - **3 точки**; За довършване - **2 точки**; Опити за използване на САСГ, които водят до частични резултати - **1 точка**.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ и вписаната му окръжност ω, която допира страните AB, BC и CA в точките M, F и E съответно. Нека N е другата пресечна точка на CM и ω. Прекарана е права l през върха C, успоредна на AB. Пресечните точки на l с правите ME и MF са P и Q съответно. Да се докаже, че $\angle ENF = \angle PNQ$.

Решение.



От успоредността и от периферни ъгли имаме:

$$\angle ENM = \angle EMA = \angle EPC$$

и също така:

$$\angle MNF = \angle FMB = \angle FQC$$

Следователно четириъгълниците $ENCP$ и $FNCQ$ са вписани. Сега изразяваме:

$$\angle ENF = \angle ENM + \angle MNF = \angle AEM + \angle BFM =$$

$$= \angle PEC + \angle CFQ = \angle PNC + \angle CNQ = \angle PNQ$$

и задачата е решена.

Оценяване. Доказателство, че $\angle ENM = \angle EDC$ и $\angle FNM = \angle FQC$ - **4 точки**; Наблюдение, че $ENCD$ и $FNCQ$ са вписани - **2 точки**; Довършване - **4 точки**. Частични изразявания на ъгли без да е получен някой от горните резултати - **1 точка**;

Задача 4. Дадено е естествено число n. Всяка от четирите страни на квадрат е оцветена в точно един от n различни цвята. Да се намери броят на различните възможни оцветявания (с точност до ротации и отражения).

Решение. Да разгледаме няколко случая за това как са разположени цветовете върху страните на квадрата:

Първи случай. Има 4 различни цвята - тогава има $\binom{n}{4}$ начина да изберем 4-те цветята и 3 начина по които да ги разположим. Възможностите са $abcd, acbd$ и $abdc$, където $a, b, c,$ и d са цветовете, а подредбата им отговаря на наредбата върху страните на квадрата. Общо за този случай се получават $3\binom{n}{4}$ начина.

Втори случай. Има 2 еднакви и 2 различни цвята - тогава има n възможности за този който се среща 2 пъти и $\binom{n-1}{2}$ за останалите 2 цвята. А за подредбата им върху квадрата има само 2 начина (еднаквите да са един срещу друг или един до друг). Общо за този случай се получават $2n\binom{n-1}{2}$ начина.

Трети случай. Има 2 двойки еднакви цветове - тогава има $\binom{n}{2}$ начина да изберем цветовете и 2 начина да ги разположим върху квадрата (еднаквите да са един срещу друг или един до друг). Общо за този случай се получават $2\binom{n}{2}$ начина.

Четвърти случай. Има 3 еднакви и един различен цвята. Тогава има n начина за цвета, който се среща три пъти и $n-1$ начина за другия цвят и може да се разположат само по единствен начин. Общо за този случай се получават $n(n-1)$ начина.

Пети случай. Има 4 еднакви цвята. Тогава има n начина да изберем цвета и очевидно начина е единствен. Общо за този случай се получават n начина.

Като съберем начините за отделните случаи се получава отговор.

$$3\binom{n}{4} + 2n\binom{n-1}{2} + 2\binom{n}{2} + n(n-1) + n.$$

Оценяване. За всеки от петте случая по **2 точки**

Задача 5. Съществува ли двойка (a, b) от различни реални числа, за които са изпълнени равенствата $a^3 - a^2 = b^3 - b^2$ и $3a^4 - 4a^3 = 3b^4 - 4b^3$?

Решение. Не. Да положим $s = a+b$, $p = ab$. Тогава първото равенство е еквивалентно на

$$a^3 - b^3 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = a + b \Leftrightarrow p = s^2 - s$$

а второто се преобразува до

$$3(a^4 - b^4) = 4(a^3 - b^3) \Leftrightarrow 3(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = 4(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow$$

$$3(s^3 - 2sp) = 4(s^2 - p) \Leftrightarrow (6s - 4)p = 3s^3 - 4s^2$$

Следователно

$$3s^3 - 4s^2 = (6s - 4)(s^2 - s) \Leftrightarrow s(3s^2 - 6s + 4) = 0 \Leftrightarrow s = 0$$

понеже $3s^2 - 6s + 4$ има отрицателна дискриминанта. Последното дава $p = 0$ и $a = b = 0$, противоречие.

Оценяване. За правилно делене на $a-b$ във всяко от двете равенства – **по 1 точка**; За разглеждане на сбор и произведение – **1 точка**; За изразяване на p чрез s в първото равенство – **2 точки**; За изразяване на p чрез s във второто равенство – **3 точки**; Довършване – **2 точки**

Задача 6. За естествено число a с $s(a)$ ще означаваме сумата от цифрите му в десетичния запис. Да се намери минималната възможна стойност на $\frac{a}{s(a)}$, където a е шестцифрено число.

Решение. Нека $a = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} = 10^5a_1 + 10^4a_2 + 10^3a_3 + 10^2a_4 + 10a_5 + a_6$ е десетичният запис на a, като $a_1 \geq 1$. Ще отделяме цяла част:

$$\frac{a}{s(a)} = \frac{10^5a_1 + 10^4a_2 + 10^3a_3 + 10^2a_4 + 10a_5 + a_6}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6} =$$

$$= 1 + \frac{(10^5 - 1)a_1 + (10^4 - 1)a_2 + (10^3 - 1)a_3 + (10^2 - 1)a_4 + (10 - 1)a_5}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}$$

При фиксирани a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 числителят е винаги положителен. Тогава частното $\frac{a}{s(a)}$ приема най-малка стойност когато знаменателят е възможно най-голям, т.е. когато a_6 е възможно най-голямо и следователно $a_6 = 9$.

Аналогично разсъждаваме за другите цифри:

$$\frac{a}{s(a)} = 10 + \frac{(10^5 - 10)a_1 + (10^4 - 10)a_2 + (10^3 - 10)a_3 + (10^2 - 10)a_4 + (1 - 10)a_6}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}$$

Понеже $a_1 \geq 1$, то числителят е винаги положителен и при фиксирани a_1, a_2, a_3, a_4 и a_6 минимум на частното се достига при $a_5 = 9$. Аналогични твърдения са валидни за a_4 и a_3.

За a_2 имаме:

$$\frac{a}{s(a)} = 10^4 + \frac{(10^5 - 10^4)a_1 + (10^3 - 10^4)a_3 + (10^2 - 10^4)a_4 + (10 - 10^4)a_5 + (1 - 10^4)a_6}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}$$

Тук вече може да се случи числителят да не е положителен (например $a_1 = 1, a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 9$). Ако числителят на последната дроб е положителен, то частното $\dfrac{a}{s(a)}$ е поне 10^4. Ако числителят е отрицателен, то частното е по-малко от 10^4. Нас ни интересува минимум, така че трябва числителят да е отрицателен и тогава минимум на $\dfrac{a}{s(a)}$ се достига при минимален знаменател. Тогава при фиксирани a_1, a_3, a_4, a_5 и a_6 минимум при $a_2 = 0$.

$$\frac{a}{s(a)} = 10^5 + \frac{(10^4 - 10^5)a_2 + (10^3 - 10^5)a_3 + (10^2 - 10^5)a_4 + (10 - 10^5)a_5 + (1 - 10^5)a_6}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}$$

Тук числителят е винаги отрицателен. Минимум при минимален знаменател, т.е. $a_1 = 1$.

Следователно най-малката стойност на $\dfrac{a}{s(a)}$ е $\dfrac{109999}{37}$.

Оценяване. За идея за отделяне на цяла част – **2 точки**; За верен отговор – **2 точки**; За доказателство на минималност – **6 точки**