СОФИЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА "ЗА ТОРТАТА НА ДИРЕКТОРА"

ТЕМА ПО **МАТЕМАТИКА**
7 КЛАС

Задача 1. Вярно ли е, че всеки изпъкнал многоъгълник може да бъде разрязан на равнобедрени триъгълници?

Задача 2. Пътят между селищата A и B минава през възвишението C. Велосипедист се изкачил от A до C за цяло число часове със средна скорост $5km/h$. После се спуснал от C до B със средна скорост $11km/h$, като вървял с 2 часа по-малко, отколкото на изкачване. Колко километра е разстоянието между A и B ако е известно, че пътят между A до C е k пъти по-малък от пътя между C и B, където k е естествено число?

Задача 3. Да се намери най-малкото трицифрено число $\overline{abc}$, за което $\overline{abc}^n$ завършва на $\overline{abc}$ за всяко естествено n.

Задача 4. В непрозрачна кутия има 16 топки – 6 сини, 7 червени и 3 зелени. По случаен начин от кутията се теглят 4 топки.

а) По колко различни начина можем да изтеглим 4 топки?

б) В колко процента от случаите измежду изтеглените 4 топки ще има повече сини, отколкото червени?

Задача 5.Даден е квадрат $ABCD$ с обиколка $4a$ *см*. Точка M е от вътрешността му, като $BM = a$ *см*. Ъглополовящата на $\angle MBA$ пресича отсечката AD в точка K, а правата KM пресича отсечката CD в точка T.

а) Да се намерят мярката на $\angle TBK$ и обиколката на $\triangle KDT$, изразена чрез a.

б) Ако точка T е средата на CD, да се докажат нареванествата $DK > \dfrac{a}{2}$ *см* и $BT > BK$.

Задача 6. Даден е многочленът $M = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$.

Има ли цели стойности за x и y, за които стойността на M е равна на

а) 32?

б) 33?

РЕШЕНИЯ:

Задача 1. Вярно ли е, че всеки изпъкнал многоъгълник може да бъде разрязан на равнобедрени триъгълници?

Решение. **Отговор: Да!** Ще покажем, че всеки триъгълник $\triangle ABC$ може да бъде разрязан на равнобедрени триъгълници. Нека без ограничение ъгълът с най-голяма мярка е при върха C. Тогава петата H на височината от C към AB е вътрешна точка за отсечката AB. Сега ако M и N са средите на страните AC и BC съответно, то CM и CN се явяват медиани към хипотенузите в $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ съответно. Така $\triangle ABC$ може да бъде разделен на равнобедрени триъгълници, а именно: $\triangle AHM$, $\triangle CHM$, $\triangle BHN$ и $\triangle CHN$.

Сега разглеждаме произволен изпъкнал n-ъгълник, където $n \geq 3$ е естествено число. Ако изберем един връх и прекараме всички диагонали през него, ще разрежем многоъгълника на $n-2$ триъгълника. Всеки от тези $n-2$ триъгълника може да бъде разрязан на равнобедрени триъгълници, откъдето следва, че и многоъгълникът може да бъде разрязан на равнобедрени триъгълници.

Оценяване. Доказателство за триъгълник – **5 точки**; Разрязване на многоъгълника на триъгълници – **4 точки**; Заключение – **1 точка**; Небосновани отговори се оценяват с **0 точки**.

Задача 2. Пътят между селищата A и B минава през възвишението C. Велосипедист се изкачил от A до C за цяло число часове със средна скорост $5km/h$. После се спуснал от C до B със средна скорост $11km/h$, като вървял с 2 часа по-малко, отколкото на изкачване. Колко километра е разстоянието между A и B ако е известно, че пътят между A до C е k пъти по-малък от пътя между C и B, където k е естествено число?

Решение. Оначаваме с $t \in \mathbb{N}$ времето, за което велосипедистът е изминал разстоянието S_1 от A до C. Тогава $S_1 = 5t$. Тогава за пътят S_2 от C до B имаме $S_2 = 11(t-2)$. Следователно $t > 2$. Сега знаем, че $kS_1 = S_2$, където k е естествено число. Последното равенство е еквивалентно на $k = \dfrac{11(t-2)}{5t}$. Следователно $11t - 22$ се дели на $5t$. Понеже 5 и 11 са взаимнопрости, то 5 дели $t-2$, а от друга страна t дели 22. Единствените естествени делители на 22, които дават остатък 5 при деление на 5 са 2 и 22. Но понеже $t > 2$, то единствената възможност е $t = 22$. Така $S_1 = 110\ km$ и $S_2 = 220\ km$. Тогава пътят между A и B е равен на $S_1 + S_2 = 330\ km$.

Оценяване. Изразяване на S_1 и S_2 - по **2 точки** за всяко; Намиране на t – **5 точки**; Отговор – **1 точка**.

Задача 3. Да се намери най-малкото трицифрено число $\overline{abc}$, за което $\overline{abc}^n$ завършва на $\overline{abc}$ за всяко естествено n.

Решение. Нека $x = \overline{abc}$ и $n = 2$. Тогава $x^2 \equiv x \pmod{1000}$. Следователно $x(x-1)$ се дели на 1000. Понеже x и $x-1$ са трицифрени, то те не могат да се делят на 1000. Ясно е, че 2 и 5 делят точно едно от x и $x-1$. Ако 2 и 5 делят едно и също число, то x или $x-1$ ще се дели на 1000, което е невъзможно.

Първи случай. Имаме, че x е четно. Тогава x се дели и на 8. Следователно 8 дели x и 125 дели $x-1$. Всички трицифрени числа x, за които $x-1$ се дели на 125 са 126, 251, 376, 501, 626, 751 и 876. От тях само $x=376$ се дели на 8. Следователно $376^2 \equiv 376 \pmod{1000}$, откъдето следва, че $376^n \equiv 376 \pmod{1000}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Втори случай. Имаме, че x е нечетно. Тогава 125 дели x и 8 дели $x-1$. Всички трицифрени числа x, за които x се дели на 125 са 125, 250, 375, 500, 625, 750 и 875. Единствено при $x=625$ имаме, че $x-1$ се дели на 8. Така в този случай решението е $x=625$, което е по-голямо от 376.

Така най-малкото число, за което условието е изпълнено, е $\overline{abc}=376$.

Оценяване. Разглеждане за $n=2$ – **1 точка**. Съображение, че 8 дели точно едно от x и $x-1$, а 125 - другото – **2 точки**; За разглеждането на случаите – **6 точки(по 3 за всеки)**; Проверка дали намерените числа при $n=2$ удовлетворяват условието за всяко n – **1 точка**.

Задача 4. В непрозрачна кутия има 16 топки – 6 сини, 7 червени и 3 зелени. По случаен начин от кутията се теглят 4 топки.

а) По колко различни начина можем да изтеглим 4 топки?

б) В колко процента от случаите измежду изтеглените 4 топки ще има повече сини, отколкото червени?

Решение.

Ако считаме топките за различими, то

а). Всички възможности са $\binom{16}{4}=1820$.

б). Измежду изтеглените можем да имаме най-много 4 сини. Разглеждаме таблица с възможностите да изтеглим повече сини отколкото червени.

сини	червени	зелени	брой начини
4	0	0	$\binom{6}{4}=15$
3	1	0	$\binom{6}{3}\binom{7}{1}=20.7=140$
3	0	1	$\binom{6}{3}\binom{3}{1}=20.3=60$
2	1	1	$\binom{6}{2}\binom{7}{1}\binom{3}{1}=15.7.3=315$
2	0	2	$\binom{6}{2}\binom{3}{2}=15.3=45$
1	0	3	$\binom{6}{1}\binom{3}{3}=6.1=6$

Броят на изтеглянията, в който измежду четирите топки има повече сини отколкото червени е $15+140+60+315+45+6=581$. Тогава търсеният процент е $\dfrac{581}{1820}=31\frac{12}{13}\%$.

Ако считаме топките за неразличими, то В този случай две изтегления са еднакви ако имат по равен брой сини, зелени и червени топки. Ще преброим възможностите по броя изтеглени сини.
Ако сме изтеглили 4 сини топки, то няма останали и това е един начин.
Ако сме изтеглили 3 сини, последната може да червена или зелена - 2 начина.
Ако сме изтеглили 2 сини, от останалите може да има 2 червени, по една червена и

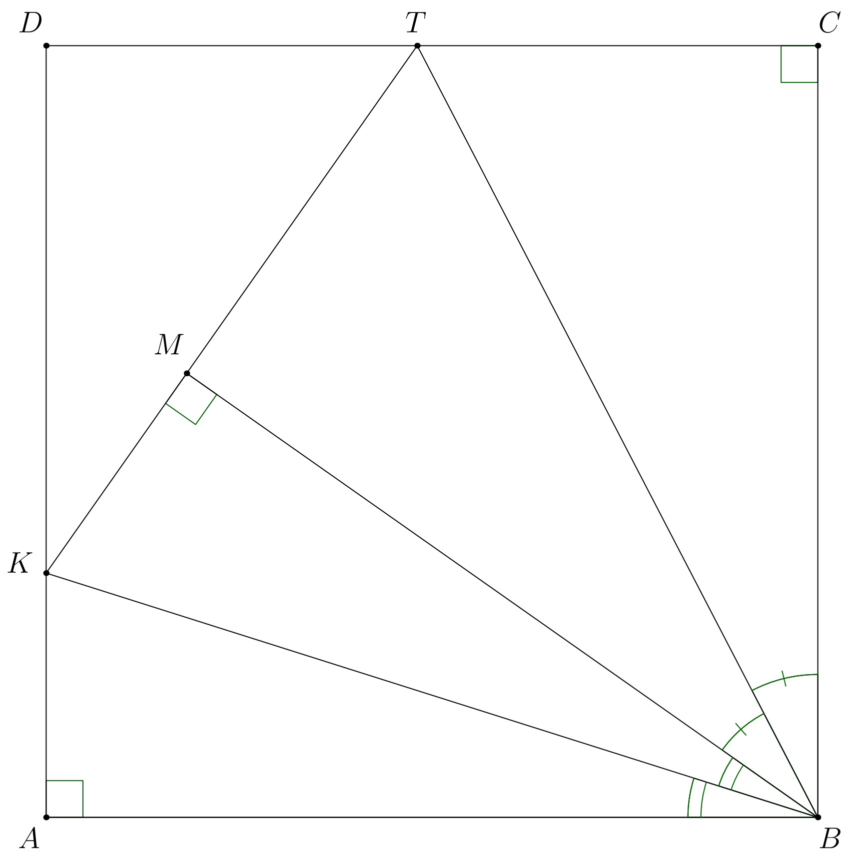
зелена или 2 зелени - 3 начина.
Ако сме изтеглили 1 синя, то има варинатите: 3 червени, 2 червени и 1 зелена, 1 червена и 2 зелени и 3 зелени - общо 4 начина.
Ако сме изтеглили 0 сини, то има 4,3,2 или 1 червени (и съответният брой зелени) - 4 начина.
Така броят на начините е $1+2+3+4+4=14$. От тях сините са повече от червените в 6. Търсеният процент е $\frac{6}{14}100\% = 42\frac{6}{7}\%$.

Оценяване. За всяка подточка – **5 точки**.

Задача 5. Даден е квадрат $ABCD$ с обиколка $4a$ *см*. Точка M е от вътрешността му, като $BM = a$ *см*. Ъглополовящата на $\angle MBA$ пресича отсечката AD в точка K, а правата KM пресича отсечката CD в точка T.

а) Да се намерят мярката на $\angle TBK$ и обиколката на $\triangle KDT$, изразена чрез a.

б) Ако точка T е средата на CD, да се докажат неравенествата $DK > \dfrac{a}{2}$ *см* и $BT > BK$.



Решение а). Ще покажем, че $\triangle ABK \cong \triangle MBK$. Имаме $AB = MB$, KB е обща и $\angle KBA = \angle KBM$, откъдето исканото следва по първи признак. Тогава $\angle KMB = \angle KAB = 90^\circ$. От друга страна $KM = KA$ като съответни елементи. Сега разглеждаме правоъгълните $\triangle BMT$ и $\triangle BCT$, в които $BM = BC$ и BT е обща хипотенуза. Следователно те са еднакви по катет и хипотенуза, откъдето $\angle MBT = \angle TBC$ и $MT = TC$ като съответни елементи.

Разглеждаме $\angle KBT = \angle KBM + \angle MBT = \frac{1}{2}\angle ABM + \frac{1}{2}\angle MBC = \frac{\angle ABC}{2} = 45^\circ$.
Означаваме с P обиколката на $\triangle KDT$. Имаме

$$P = DK+KT+TD = DK+KM+MT+TD = DK+KA+CT+TD = DA+CD = 2a.$$

Решение б). Означаваме $DK = z$. Тогава $AK = a - z$ и $KM = z$. От друга страна $DT = MT = CT = \frac{a}{2}$. Така $KT = \frac{a}{2} + a - z = \frac{3a}{2} + z$. От неравенство на страните в $\triangle TDK$ имаме $DK + DT > KT$. Така $z + \frac{a}{2} > a - z + \frac{3a}{2}$, откъдето $2z > a$, което означава, че $KD = x > \frac{z}{2}$. Сега имаме $KM < TM$. Тогава има точка K_1 от отсечката MT така, че $MK_1 = MK$. Тогава $\triangle BK_1T$ е тъпоъгълен с тъп ъгъл при върха K_1. Така $BT > BK_1$ и $BT > BK$.

Оценяване. За $\triangle ABK \cong \triangle MBK$ – **1 точка**; За $\triangle BMT \cong BCT$ – **2 точки**; Намиране на търсеният ъгъл – **1 точка**; Намиране на търсената обиколка – **1 точка**. Доказателство $DK > \frac{a}{2}$ – **3 точки**; Доказателство $BT > BK$ – **2 точки**.

Задача 6. Даден е многочленът $M = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$.
Има ли цели стойности за x и y, за които стойността на M е равна на

а) 32?

б) 33?

Решение а). Нека $x = 2$ и $y = 0$. Тогава $M = 32$.
Решение б). Ще разложим многочлена M на множители.

$$M = x^4(x+3y) - 5x^2y^2(x+3y) + 4y^4(x+3y) = (x+3y)(x^4 - x^2y^2 - 4x^2y^2 + 4y^4) =$$

$$= (x+3y)(x^2(x^2-y^2) - 4y^2(x_2 - y^2)) = (x+3y)(x^2-y^2)(x^2-4y^2).$$

Така имаме $M = (x+3y)(x-y)(x+y)(x-2y)(x+2y)$. Да допуснем, че има цели x и y, за които $M = 33$. Имаме, че $33 = 3.11$. Тогаво значава, че най-много две от множителите на M имат абсолютна стойност по-голяма от 1. Следователно поне три от тези множители имат абсолютни стойности равни на 1. От тези три множители, поне два са с еднакъв знак. Следователно от петте множители, на които разложихме M имаме два, които са равни помежду си. Които и два да са равните множители, винаги имаме $y = 0$, откъдето $x^5 = 33$, за някое естествено x, което е противоречие. В този случай такива числа няма.
Оценяване. Пример за $M = 32$ – **2 точки**; Разлагане на многочлена M – **4 точки**; Доказателство, че поне два от множителите са равни – **3 точки**; Отговор – **1 точка**; Предположение, че поне два от множителите са равни(без доказателство) – **1 точка**;