СОФИЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА "ЗА ТОРТАТА НА ДИРЕКТОРА"

ТЕМА ПО **МАТЕМАТИКА**
6 КЛАС

Задача 1. Нека $A = 10^{2017} + 11.10^{2015} - 11.10^{2016} + 11.10^{2013} - 11.10^{2014} - 10^{2012}$ и $B = 2\frac{1}{2017} \cdot 2\frac{1}{2018} + 2\frac{2016}{2017} \cdot 1\frac{2017}{2018} + \dfrac{2015}{2017} \cdot \dfrac{1}{2018}$. Колко цифри има естественото число, равно на $\dfrac{A}{B}$?

Задача 2. Нека p е просто число, за което съществува естествено число n, такова че числото $N = p^n$ има точно 20 цифри. Да се докаже, че в десетичния запис на N поне три цифри са равни.

Задача 3. Даден е трапец $ABCD(AB \parallel CD)$, в който $DA = AB = BC$.

а) Да се докаже, че A е на равни разстояния от правите BC и CD.

б) Точката M лежи на страната BC и е такава, че $S_{ABM} = S_{AMCD}$.

Да се докаже, че обиколката на $\triangle ABM$ е равна на обиколката на четириъгълника $AMCD$.

Задача 4. Едно естествено число x се нарича *съвършено* ако сборът от всички делители на x (включително 1 и x) е равен на $2x$. Нека n е *съвършено* естествено число, за което числата $n-1$ и $n+1$ са едновременно прости.

а) Да се докаже, че n се дели на 6.

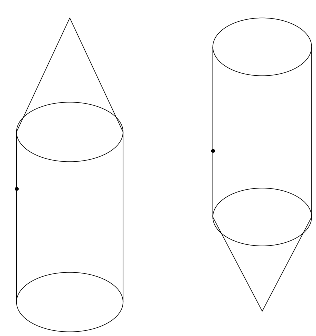
б) Да се намерят всички такива n.

Задача 5. Кои прости числа могат да се представят във вида

$$|n-1| + |n-2| + \cdots + |n-7|,$$

където n е цяло число?

Задача 6. Бутилка се състои от конус и цилиндър с равни височини(чертеж 1) и върху цилиндъра е поставен белег. Иван напълнил с вода бутилката до белега,затворил я и я обърнал обратно(чертеж 2). Изненадата му била голяма, като видял, че нивото на водата отново стига до белега. Погледнал внимателно и видял, че на белега пишело 0,5 литра. Колко литра събира цялата бутилка и на каква част от височината на цилиндъра е поставен белега?



1. 2

РЕШЕНИЯ:

Задача 1. Нека $A = 10^{2017} + 11.10^{2015} - 11.10^{2016} + 11.10^{2013} - 11.10^{2014} - 10^{2012}$ и $B = 2\frac{1}{2017} \cdot 2\frac{1}{2018} + 2\frac{2016}{2017} \cdot 1\frac{2017}{2018} + \dfrac{2015}{2017} \cdot \dfrac{1}{2018}$. Колко цифри има естественото число, равно на $\dfrac{A}{B}$?

Решение. Преобразуваме израза

$$A = 10^{2012}(10^5 + (10+1)10^3 - (10+1)10^4 + (10+1)10 - (10+1)10^2 - 1) = 9.10^{2012}.$$

Нека $a = \dfrac{1}{2017}$ и $b = \dfrac{1}{2018}$. Тогава

$$B = (2+a)(2+b) + (2+1-a)(1+1-b) + (1-a-a)b =$$
$$= (2+a)(2+b)+(3-a)(2-b)+(1-2a)b = 4+2a+2b+ab+6-2a-3b+ab+b-2ab = 10.$$

Тогава $\dfrac{A}{B} = 9.10^{2011}$, което има 2012 цифри.

Оценяване. Пресмятане на A – **4 точки**; Пресмятане на B – **4 точки**; Представяне на $\dfrac{A}{B}$ – **1 точка**; Отговор – **1 точка**.

Задача 2. Нека p е просто число, за което съществува естествено число n, такова че числото $N = p^n$ има точно 20 цифри. Да се докаже, че в десетичния запис на N поне три цифри са равни.

Решение. Да допуснем, че в записа на N няма три еднакви цифри. Тогава всяка от десетте цифри се среща точно по веднъж. Но тогава сумата от цифрите на N е равна на $2(0+1+2+3+\cdots+9) = 90$. Тогава N се дели на 3, което означава, че $p = 3$. Степените на 3, които се записват с 20 цифри са 3^{40} и 3^{41}. Достатъчно е да се докажат неравенствата $3^{39} < 10^{19} < 3^{40} < 3^{41} < 10^{20} < 3^{42}$. Директни проверки дават, че 3^{40} и 3^{41} се записват с поне 3 еднакви цифри, което противоречи на допускането.

Оценяване. Допускане на противното - **1 точка**; Доказателство, че N е кратно на 3 - **3 точки**; Доказателство, че $p = 3$ - **3 точки**; Довършване - **3 точки**.

Задача 3. Даден е трапец $ABCD(AB \parallel CD)$, в който $DA = AB = BC$.

а) Да се докаже, че A е на равни разстояния от правите BC и CD.

б) Точката M лежи на страната BC и е такава, че $S_{ABM} = S_{AMCD}$.

Да се докаже, че обиколката на $\triangle ABM$ е равна на обиколката на четириъгълника $AMCD$.

Решение а). Означаваме с S лицето на трапеца.

Нека m и h са разстоянията съответно от A до BC и CD. Ясно е, че разстоянието от C до AB е равно на h. Тогава $S_{ABM} = \dfrac{AB.h}{2} = \dfrac{BC.m}{2}$, но $AB = BC$, откъдето $m = h$.

Решение б). Понеже $S_{ABM} + S_{AMCD} = S$ и $S_{ABM} + S_{AMCD} = S$, то $S_{ABM} = \dfrac{S}{2}$. Означаваме $AB = a$, $CD = b$ и $BM = x$. Нека h е височината на трапеца. По-горе доказахме, че дължината на височината през A в $\triangle ABM$ е равна на h. Тогава $S_{ABM} = \dfrac{BM.h}{2} = \dfrac{xh}{2} = \dfrac{S}{2}$. Така $S = xh$, но от формула за лице на трапец $S = \dfrac{a+b}{2}h$. Така $a + b = 2x$. Разглеждаме обиколките P_1 и P_2 съответно на $\triangle ABM$ и четириъгълника $AMCD$. Имаме $P_1 = a+x+MA$ и $P_2 = a+b+a-x+MA$. Заместваме $a + b = x$ в P_2 и получаваме $P_2 = a + x + MA = P_1$.

Оценяване. Доказателство, че A е равноотдалечена от правите BC и CD – **3 точки**; Изразяване на отсечката BM чрез страните на трапеца – **5 точки**; Довършване – **2 точки**.

Задача 4. Едно естествено число x се нарича *съвършено* ако сборът от всички делители на x (включително 1 и x) е равен на $2x$. Нека n е *съвършено* естествено число, за което числата $n - 1$ и $n + 1$ са едновременно прости.

а) Да се докаже, че n се дели на 6.

б) Да се намерят всички такива n.

Решение а). Понеже $n - 1$ и $n + 1$ са прости числа, то не е възможно двете да са четни, откъдето следва, че n е четно. Директни проверки ни дават че 2 и 4 не са съвършени. Тогава $n > 4$. Ако n дава остатък 1 при деление на 3, следва, че $n-1 > 3$ се дели на 3, което е невъзможно. Аналогично ако n дава остатък 2 при деление 3, то $n + 1 > 3$ се дели на 3, което е отново невъзможно. Следователно n се дели на 3. Тогава n се дели и на 6.

Решение б). По-горе доказахме, че n се дели на 6. Следователно 1,2,3 и 6 са делители на n. Тогава n, $\dfrac{n}{2}$, $\dfrac{n}{3}$ и $\dfrac{n}{6}$ са също делители на n. При $n > 6$ имаме $\dfrac{n}{6} > 1$. Тогава сборът от делителите на n е по-голям или равен на $1 + \dfrac{n}{6} + \dfrac{n}{3} + \dfrac{n}{2} + n = 2n + 1$, което не е възмвожно, защото n е *съвършено.* Следователно $n \leq 6$ и n се дели на 6 удовлетворява условиеето на задачата. Действително 6 е съвършено и $6 - 1$ и $6 + 1$ са прости.

Оценяване. Разглеждане на малки стойности – **1 точка**; За доказателство на твърдението n е четно – **1 точки**; Доказателство, че 3 дели n – **3 точки**; Доказателство, че $n \leq 6$ – **4 точки**. Отговор – **1 точка**.

Задача 5. Кои прости числа могат да се представят във вида

$$|n-1| + |n-2| + \cdots + |n-7|,$$

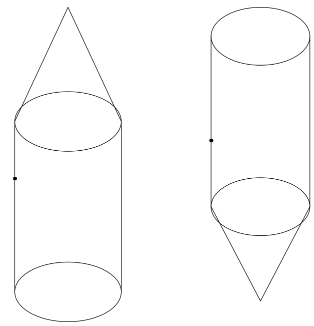
където n е цяло число?

Решение. Нека $M = |n-1|+|n-2|+\cdots+|n-7|$. Ако $n \geq 7$ имаме $M = 7n-28 > 7$ и M се дели на 7, което не е просто. Следователно $n < 7$. Ако $n \leq 0$, то $M = 28-7n > 7$ и M се дели на 7, което не е просто. Така остава да проверим за кои $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$

числото M е просто. Единствено при $n = 3$ и $n = 5$ получаваме $M = 13$. Така единственото просто число, което може да се представи в искания вид, е 13.

Оценяване. Доказателство, че $n < 7$ – **2 точки**; Доказателство, че $n > 0$ – **2 точки**; Проверки за $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ – **6 точки**.

Задача 6. Бутилка се състои от конус и цилиндър с равни височини(чертеж 1) и върху цилиндъра е поставен белег. Иван напълнил с вода бутилката до белега,затворил я и я обърнал обратно(чертеж 2). Изненадата му била голяма, като видял, че нивото на водата отново стига до белега. Погледнал внимателно и видял, че на белега пишело 0,5 литра. Колко литра събира цялата бутилка и на каква част от височината на цилиндъра е поставен белега?



1. 2

Решение. Нека h е височината на цилиндъра, а B – лицето на основата му. Означаваме с V обемът на бутилката. Нека V_1 и V_2 са съответно обемите на цилиндъра и конуса. Тогава $V_1 = Bh$, $V_2 = \dfrac{Bh}{3}$ и $V_1 + V_2 = V$. Така получаваме, че $V = \dfrac{4Bh}{3}$. Обемът на водата е $0,5l$. От това, че и в двата случая нивото на водата стига до белега, заключваме че $V = 1l$. Следователно $\dfrac{4Bh}{3} = 1$. Нека h_1 е нивото на водата при положението от фугира 1. Тогава $Bh_1 = 0,5$. Тогава $Bh_1 : \dfrac{4}{3}Bh = 0,5 : 1$. Последното отношение е еквивалентно на $\dfrac{3h_1}{4h} = \dfrac{1}{2}$, откъдето $\dfrac{h_1}{h} = \dfrac{2}{3}$.

Оценяване. Намиране на обема на бутилката – **2 точки**. Изразяване на обема на бутилката чрез основата и височината на цилиндъра – **4 точки**. За изразяване на обема на водата чрез основата на цилиндъра и нивото й – **2 точки**; Отговор – **2 точки**;