СОФИЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА "ЗА ТОРТАТА НА ДИРЕКТОРА"

ТЕМА ПО **МАТЕМАТИКА**
5 КЛАС

Задача 1. Ще казваме, че две пионки се ”атакуват”, ако са разположени в съседни по връх клетки на квадратна дъска. Колко най-много пионки могат да се поставят върху дъска 8 х 8, никои две от които не се ”атакуват”?

Задача 2. В една съвкупност от естествени числа сборът на всеки 5 е по-малък от 16, а сборът на всичките числа е 78. Колко най-малко числа има в тази съвкупност?

Задача 3. В двора на едно училище играят 23 деца на 10,11,12 или 13 години, а сборът от годините на всички е 253. Колко от децата са на 12 години, ако те са с 50% повече от тези на 13 години?

Задача 4. Дадено е шестцифреното число A. Числото $B < A$ е получено след разместване на цифрите на числото A. Колко най-много цифри 5 може да съдържа разликата $A - B$ в десетичния си запис?

Задача 5. Дадени са естествените числа от 1 до 28 включително. От тези числа по произволен начин се избират 11. Да се докаже, че измежду избраните можем да намерим четири различни числа a, b, c и d, за които $a + b = c + d$.

Задача 6. Да се намерят всички трицифрени $\overline{xyz}$, за които $\dfrac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$.

РЕШЕНИЯ:

Задача 1. Ще казваме, че две пионки се "атакуват", ако са разположени в съседни по връх клетки на квадратна дъска. Колко най-много пионки могат да се поставят върху дъска 8 x 8, никои две от които не се "атакуват"?

Решение. Във всяко квадратче 2 x 2 могат да се разположат без да се "атакуват" най-много две пионки. Дъска 8 x 8 може да се раздели без застъпване на 16 квадратчета 2 x 2. Следователно можем да разположим най-много $16.2 = 32$ пионки, които "не се атакуват". Примерът за 32 пионки е нареждаме първия, третия, петия и седмия ред с по 8 пионки.

Оценяване. Доказателство, че има най-много 32 пионки – **6 точки**; Пример за 32 – **4 точки**.

Задача 2. В една съвкупност от естествени числа сборът на всеки 5 е по-малък от 16, а сборът на всичките числа е 78. Колко най-малко числа има в тази съвкупност?

Решение. **Отговор.** 26**.** Да допуснем, че има 25 числа, които изпълняват условието. Тогава ако ги разделим на 5 групи с по 5 числа всяка, то във всяка група сборът ще е не повече от 15, откъдето сборът от числата в петте групи ще бъде не повече от $15.5 = 75 < 78$. Получихме противоречие със сбора, откъдето следва, че числата са поне 26. Нека изеберм 26 числа равни на 3. Те изпълняват условието на задачата.

Оценяване. Доказателство, че числата са поне 26 на брой – **7 точки**; Пример за 26 – **3 точки**.

Задача 3. В двора на едно училище играят 23 деца на 10,11,12 или 13 години, а сборът от годините на всички е 253. Колко от децата са на 12 години, ако те са с 50% повече от тези на 13 години?

Решение. Нека означим с x, y, z и t съответно броят на децата, които са съответно на 10, 11, 12 и 13 години. Тогава

$$10x + 11y + 12z + 13t = 253$$

$$x + y + z + t = 23$$

$$z = \frac{3}{2}t.$$

Следователно t е четно число. От друга страна $x + y + \frac{5}{2}t = 23$, което е равносилно на $5x + 5y + 25t = 230$. Също така $10x + 11y + 31t = 253$. Ясно е, че $t < 10$. Извеждаме последните две равенства, откъдето следва $y + 6t = 23$ и така $t < 4$. Но t е четно число. Следователно имаме единствена възможност $t = 2$, откъдето $y = 11$, $z = 3$ и $x = 7$. Следователно има 3 деца на 13 години.

Оценяване. Свеждане до три уравнения – **3 точки**; Доказателство, че t е четно – **1 точка**; Доказателство, че $t < 10$ – **1 точка**; Довършване – **5 точки**.

Задача 4. Дадено е шестцифреното число A. Числото $B < A$ е получено след разместване на цифрите на числото A. Колко най-много цифри 5 може да съдържа разликата $A - B$ в десетичния си запис?

Решение. Понеже A и B имат равен сбор от цифрите си, то A и B дават един и същи остатък про деление на 9 (Всяко число и сборът от цифрите му дават равни остатъци при деление на 9). Следователно $A-B$ се дели на 9. Тогава $A-B = 555555$ е невъзможно, защото 555555 не се дели на 9. Следователно $A-B$ не може да съдържа шест цифри 5 в десетичния си запис. Нека $A = 401055$ и $B = 145500$. Тогава $A-B = 255555$, което съдържа пет цифри 5. Следователно отговорът е 5.

Оценяване. Съображение $A - B$ се дели на 9 – **2 точки**; Доказателство, че $A - B$ не може да има шест цифри 5 в десетичния си запис – **1 точка**; Пример за пет цифри 5 – **7 точки.**

Задача 5. Дадени са естествените числа от 1 до 28 включително. От тези числа по произволен начин се избират 11. Да се докаже, че измежду избраните можем да намерим четири различни числа a, b, c и d, за които $a + b = c + d$.

Решение. Разглеждаме единадесетте избрани числа. Тогава имаме 55 сборове по двойки на тези числа. Всеки сбор е по-голям или равен на 3 и по-малък или равен на 55. Следователно имаме най-много 53 възможности за сбора по двойки. Тогава измежду 55–те сбора по двойки поне два ще имат еднаква стойност, което означава, че има четири числа a, b, c и d, за които $a + b = c + d$.

Оценяване. Доказателство, че различните суми по двойки са 53 – **3 точки**; Твърдение, че има 55 суми по двойки измежду избраните числа – **3 точки**; Довършване – **4 точки**.

Задача 6. Да се намерят всички трицифрени $\overline{xyz}$, за които $\dfrac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$.

Решение. Условието е равносилно на $\dfrac{1}{x+y+z} = \dfrac{\overline{xyz}}{1000}$, откъдето $\overline{xyz}(x+y+z) = 1000$. Имаме $\overline{xyz} \geq 100$. Ако $x + y + z > 10$ получаваме, че $(x + y + z)\overline{xyz} > 1000$, което е невъзможно. Следователно $x+y+z \leq 10$. Ако $x+y+z = 10$, то $\overline{xyz} = 100$, но сборът от цифрите на 100 не е равен на 10. Тогава $x+y+z$ е едноцифрено число, което дели 1000. Тогава $x+y+z$ може да бъде равно на 1, 2, 4, 5 или 8. След директни проверки се установява, че единствено $x + y + z = 8$ и $\overline{xyz} = 125$ удовлетворяват равенството.

Оценяване. Подхдодящо преобразуване на израза – **2 точки**; За $x + y + z \leq 10$ – **2 точки**; Разглеждане на случаите за $x + y + z$ – **5 точки**; Отговор – **1 точка**.