СОФИЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА "ЗА ТОРТАТА НА ДИРЕКТОРА"

ТЕМА ПО **МАТЕМАТИКА**
10-11 КЛАС

Задача 1. Дадена е двуизмерна огледална стая във формата на правилен шестоъгълник $ABCDEF$. В центъра ѝ има цел, а някъде другаде в стаята има и човек с лазерен пистолет, чийто изстрел се отразява от стените. Лазерът *поразява* целта ако мине на разстояние, по-малко от $10^{-30}AB$ от нея. Приемете, че лазерът минава свободно през човека. Човекът стреля под остър ъгъл β спрямо отсечката AC, такъв че $\sin\beta$ не може да се представи във вида $\frac{m\sqrt{3}}{2\sqrt{m^2+km+k^2}}$ за неотрицателни цели числа m и k. Да се докаже, че целта ще бъде поразена след краен брой отражения.

Задача 2. Дадена е окръжност k с диаметър AB. Избрана е произволна точка X вън от окръжността и $H \in AB$ е такава, че $XH \perp AB$. Правата AX пресича за втори път окръжността в точка C. Правите XD и XE $(D, E \in k)$ са допирателните от X към k. Означаваме $ED \cap AB = H_1$ и нека допирателните към k в точките B и C се пресичат в точка Z.

а) Да се докаже, че точките X, Z и H_1 лежат на една права.

б) Вярно ли е, че точките $BD \cap CE = Y$ и $BE \cap DC = W$ лежат върху XZ?

Задача 3. За реалните положителни числа a, b и c да се докаже неравенството

$$4(a+b+c) \geq 3(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc})$$

Задача 4. Дадено е $2n$-цифрено число N, последните n цифри на което не са едновременно нули. Първата половина от цифрите в десетичния запис на N образуват n-цифреното число A, а останалите - числото B. Да се намери броят на възможните N, за които $A.B$ дели N (в зависимост от n).

Задача 5. Дадени са естествените числа $a > 1, p, q$ и таблица с единични квадратчета и размери $(ap+1) \times (aq+1)$. *Разстояние* между две единични квадратчета ще наричаме най-късият път от едното до другото, минаващ само през съседни по страна или връх квадратчета. Фигурата A с лице $\beta > 1$ е такава, че която разстоянието между всеки две нейни квадратчета е най-много $a-1$. Да се докаже, че ако $0 < (\beta - a^2)pq + (\beta - a)(p+q) + \beta - 1$, то върху таблицата не могат да се поставят краен брой фигури A, така че всяко единично квадратче да е покрито равен брой пъти. (Фигурите могат да се припокриват, но не и да излизат от таблицата).

Задача 6. Да се намерят всички двойки от естествени числа $(n; k)$, за които числото $x^n + 1$ се дели на kn^2 за всяко естествено $x > 1$, удовлетворяващо $(x, n) = 1$.

РЕШЕНИЯ:

Задача 1. Дадена е двуизмерна огледална стая във формата на правилен шестоъгълник $ABCDEF$. В центъра ѝ има цел, а някъде другаде в стаята има и човек с лазерен пистолет, чийто изстрел се отразява от стените. Лазерът *поразява* целта ако мине на разстояние, по-малко от $10^{-30}AB$ от нея. Приемете, че лазерът минава свободно през човека. Човекът стреля под остър ъгъл β спрямо отсечката AC, такъв че $\sin\beta$ не може да се представи във вида $\frac{m\sqrt{3}}{2\sqrt{m^2+km+k^2}}$ за неотрицателни цели числа m и k. Да се докаже, че целта ще бъде поразена след краен брой отражения.

Решение. Първо ще докажем следната:

Лема. За ъгълът $0^\circ \le \beta < 90^\circ$ е изпълнено, че $\sin\beta$ може да се представи като $\frac{m\sqrt{3}}{2\sqrt{m^2+km+k^2}}$ тогава и само тогава, когато или съществува триъгълник с ъгли $120^\circ, \beta, (60^\circ - \beta)$ и целочислени страни с дължини m срещу β и k срещу $60^\circ - \beta$, или $\beta = 60^\circ$, или $\beta = 0^\circ$.

Доказателство. Случаите $\beta = 60^\circ$ и $\beta = 0^\circ$ се проверяват директно. Нека $0^\circ < \beta < 90^\circ$ и $\beta \neq 60^\circ$. Ако съществува такъв триъгълник, Косинусовата теорема дава, че страната срещу ъгълът 120° е с дължина $\sqrt{m^2+km+k^2}$. От Синусовата теорема получаваме, че

$$\sin\beta = \frac{m\sin 120^\circ}{\sqrt{m^2+km+k^2}} = \frac{m\sqrt{3}}{2\sqrt{m^2+km+k^2}}.$$

Обратната посока следва аналогично, понеже $\frac{m\sqrt{3}}{2\sqrt{m^2+km+k^2}} \le \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ$ – тогава $\beta < 60^\circ$ и съществува триъгълник с ъгли $120^\circ, \beta, (60^\circ - \beta)$ и целочислена страна с дължина m срещу β. С това лемата е доказана.

Като следствие от лемата знаем, че не съществува триъгълник с ъгли $120^\circ, \beta, (60^\circ - \beta)$ и целочислени страни с дължини m срещу β и k срещу $60^\circ - \beta$.

Да отбележим, че ако покрием цялата равнина с копия на началния шестоъгълник, то лазерът да се отрази е еквивалентно на това да продължи направо, но в следващия шестоъгълник. Тоест ако разгледаме правата (да я наречем l) и всички отражения на центъра, е достатъчно да покажем, че в даден момент l ще минава на разстояние, по-малко от $10^{-30}AB$ от някое от тях. Но те формират мрежа от еднакви равностранни триъгълници, покриващи цялата равнина. Нещо повече, една от страните на всеки шестоъгълник е успоредна на AC, една на CE и една на EA. Без ограничение нека страната на триъгълниците е с дължина 1. Нека X и Y са различни пресечни точки на l с две единични отсечки от триъгълната мрежа, успоредни на AC. Нека векторът, съединяващ X и Y, представлява сума на векторите $\vec{v}$, успореден на AC и $\vec{u}$, успореден на BD. От следствието лесно се вижда, че поне един от $\vec{v}$ и $\vec{u}$ е с ирационална дължина s. Тогава от теоремата на Кронекер съществува цяло число t, за което $\{st\} < 10^{-30}AB$. С това задачата е решена.

Оценяване. Формулировка и доказателство на лемата – **3 точки**; Свеждане на твърдението до права върху решетка от шестоъгълници – **3 точки**; Довършване на решението – **4 точки**

Задача 2. Дадена е окръжност k с диаметър AB. Избрана е произволна точка X вън от окръжността и $H \in AB$ така че $XH \perp AB$. Правата AX пресича за втори път окръжността в точка C. Правите XD и $XE(D, E \in k)$ са допирателните от X към k. Известно е, че $ED \cap AB = H_1$ и допирателните към k в B и C се пресичат в точка Z.

а) Да се докаже, че точките X, Z и H_1 лежат на една права.

б) Вярно ли е, че точките $BD \cap CE = Y$ и $BE \cap DC = W$ лежат върху XZ?

Решение а). Да разгледаме полярното съответствие π_k спрямо окръжността k с център O. Ясно е, че $\pi_k(X) = ED$ и $H_1 \in \pi_k(X)$. Тогава и $X \in \pi_k(H_1)$. Нека $\pi_k(H_1) = l$ и $H_2 = AB \cap l$. Тогава $\angle AH_2X = 90^\circ = \angle AHX$, откъдето $H_2 \equiv H$. Също, $\pi_k(H_1) = XH$, $\pi_k(Z) = BC$ и $\pi_k(X) = DE$. Така свеждаме колинеарността на X, Z и H_1 до това правите XH, BC и DE да се пресичат в една точка. Нека $AC \cap DE = T$. Понеже четириъгълникът $BAEC$ е хармоничен, то $(X, C, T, A) = 1$. От друга страна $(H, B, H_1, A) = 1$, понеже H_1 и H са инверсно спрегнати спрямо k. От зависимостите $(X, C, T, A) = 1$ и $(H, B, H_1, A) = 1$ следва, че правите XH, BC и DE да се пресичат в една точка, както се искаше.

Решение б). Нека L е пресечната точка на XY, BC и DE. Имаме $L \in \pi_k(X)$, $L \in \pi_k(Z)$ и $L \in \pi_k(H_1)$, откъдето $\pi_k(L) = XH_1$. От друга страна, от Теоремата на Брокар имаме, че $DC \cap BE = Y$ и $BE \cap DC = W$ лежат на $\pi_k(L)$. Следователно Y и W лежат на XZ.

Оценяване. Доказване на първото твърдение - **6 точки**; Доказване на второто твърдение - **4 точки**; Опити за решение с хармонично отношение, хармоничен четириъгълник или симедиани се оценяват с до **3 точки**. За верен отговор на въпроса от втората подточка - **0 точки**.

Задача 3. За реалните положителни числа a, b и c да се докаже неравенството

$$4(a + b + c) \geq 3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc})$$

Кога се достига равенство?

Решение. От неравенството между средноаритметично и средногеометрично имаме

$$a \geq a$$

$$\frac{a + 4b}{4} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{a + 4b + 16c}{12} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Събираме почленно трите неравенства, откъдето

$$a + \frac{a + 4b}{4} + \frac{a + 4b + 16c}{12} \geq a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(a + b + c) \geq 3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}).$$

Равенство се достига при $a : b : c = 16 : 4 : 1$.

Оценяване. За разглеждане на случай на равенство – **2 точки**, Доказателство на неравенството – **8 точки**. За разсъждения, не водещи до решение се присъждат не повече от **2 точки**.

Задача 4. Дадено е естествено число n. Нека N е $2n$-цифрено число, последните n цифри на които не са едновременно нули. Първата половина от цифрите в десетичния запис на N образуват n-цифреното число A, а останалите - числото B (в същия ред). Да се намери броят на различните N, за които произведението $A.B$ дели N (в зависимост от n).

Решение. Да означим $k = \dfrac{N}{AB} = \dfrac{A10^n + B}{AB}$, като $k \in \mathbb{N}$. Понеже $Bk = \dfrac{B}{A} + 10^n$, следва, че A дели B, т.е. $B = At$ за някое естествено число t. Тъй като $A \geq 10^{n-1}$ и $B < 10^n$, то $t = \dfrac{B}{A} < \dfrac{10^n}{10^{n-1}} = 10$. Освен това, от

$$k = \frac{N}{AB} = \frac{A10^n + At}{A^2t} = \frac{10^n + t}{At} \Leftrightarrow Ak = \frac{10^n}{t} + 1$$

следва, че t дели 10^n. Имаме следните случаи:

1. При $t = 1$ имаме $A = B$ и $Ak = 10^n + 1$, където $10^{n-1} \leq A < 10^n$. Оттук

$$k = \frac{10^n + 1}{A} \leq \frac{10^n + 1}{10^{n-1}} = 10 + \frac{1}{10^{n-1}} \leq 11$$

Случаят $k = 1$ е невъзможен, а $10^n + 1$ не се дели на 2, 3 и 5. При $k = 11$ трябва навсякъде да се достигат равенства, откъдето $n = 1$, $B = A = 1$ и $N = 11$.

При $k = 7$ имаме, че 7 дели $10^n + 1$, откъдето $n \equiv 3 \pmod 6$.

При $n \equiv 3 \pmod 6$ имаме, че $A = \dfrac{10^n + 1}{7} = B$ и $N = 1\underbrace{44\ldots4}_{n-2}31\underbrace{44\ldots4}_{n-2}3$.

2. При $t = 2$ имаме $Ak = 5.10^{n-1} + 1$. Съгласно $A \geq 10^{n-1}$, получаваме $k \leq 6$. Ако $n = 1$, то $Ak = 6$ и $A \in \{1, 2, 3, 6\}$. Директно се проверява, че числата 12, 24 и 36 са решения за N.

При $n \geq 2$ имаме $(5.10^{n-1} + 1, 10) = 1$, откъдето $k = 3$.

Тогава $A = \dfrac{10^n + 2}{6}$, $B = 2A = \dfrac{10^n + 2}{3}$ и $N = 1\underbrace{66\ldots6}_{n-2}73\underbrace{33\ldots3}_{n-2}4$.

3. При $t = 4$ имаме $n \geq 2$ и $Ak = 25.10^{n-2} + 1$.

Да допуснем, че $k = 1$. Тогава $B = At = 4A = 10^n + 4 > 10^n$ – противоречие.

Да допуснем, че $k \geq 3$. Тогава получаваме противоречие от неравенствата

$$A = \frac{25 * 10^{n-2} + 1}{k} \leq \frac{25 * 10^{n-2} + 1}{3} \leq \frac{27.10^{n-2}}{3} = 9.10^{n-2} < 10^{n-1}.$$

Единствената възможна стойност е $k = 2$, при което 2 дели $25.10^{n-2} + 1$ и значи $n = 2$, $A = 13$, $B = 52$ и $N = 1352$.

4. При $t = 5$ имаме $Ak = 2.10^{n-1} + 1$. Така получаваме

$$k = \frac{2.10^{n-1}+1}{A} \le \frac{2.10^{n-1}+1}{10^{n-1}} = 2 + \frac{1}{10^{n-1}} \le 3.$$

При $k = 1$ се получава $B > 10^n$, което е невъзможно, а случаят $k = 2$ е невъзможен. Единствената възможност за този случай е $k = 3$, което възможно, когато се достига равнество по-горе, откъдето $n = 1$, $A = 1$, $B = 5$ и $N = 15$.

5. При $t = 8$ имаме $Ak = 125.10^{n-3} + 1$. Случаят $k = 1$ аналогично води до $B > 10^n$, а $k \ge 2$ дава $A < 10^{n-1}$. В този случай решения няма.

Окончателно при $n = 1$ имаме решенията 11, 12, 15, 24 и 36. При $n = 2$ решенията са 1326 и 1734. При $n > 2$ има две решения за $n \equiv 3 \pmod 6$ и едно решение в останалите случаи.

Оценяване. За разглеждане на случаите $n = 1$ и $n = 2$ – **по 1 точка**, За доказване на A дели B – **1 точка**, За случая $t = 1$ – **3 точки**, За случая $t = 2$ – **2 точки**, За довършване – **2 точки**.

Задача 5. Дадени са естествените числа $a > 1, p, q$ и таблица с единични квадратчета и размери $(ap + 1) \times (aq + 1)$. *Разстояние* между две единични квадратчета ще наричаме най-късият път от едното до другото, минаващ само през съседни по страна или връх квадратчета. Фигурата A с лице $\beta > 1$ е такава, че която разстоянието между всеки две нейни квадратчета е най-много $a - 1$. Да се докаже, че ако $0 < (\beta - a^2)pq + (\beta - a)(p + q) + \beta - 1$, то върху таблицата не могат да се поставят краен брой фигури A, така че всяко единично квадратче да е покрито равен брой пъти. (Фигурите могат да се припокриват, но не и да излизат от таблицата).

Решение. Да допуснем противното – съществуват такава фигура и покритие. Да номерираме редовете и стълбовете с числата $1, 2, \dots, (ap + 1)$. Да оцветим в черно полетата (x, y), за които a дели $x-1$ и a дели $y-1$, а останалите в бяло. Да забележим, че разстоянието между всеки две черни полета е поне a. Това значи, че не е възможно фигурата A да покрива едновременно две черни полета. Тогава всяка фигура A покрива или 1 черно и $\beta - 1$ бели или β бели полета. Нека от първия вид има p на брой, а от втория – q. Като преброим колко пъти са покрити черните (има $(p+1)(q+1)$ от тях) и колко пъти – белите (има $(ap+1)(aq+1)-(p+1)(q+1)$ от тях), получаваме равенството

$$\frac{p}{(p+1)(q+1)} = \frac{p(\beta-1)+q\beta}{(ap+1)(aq+1)-(p+1)(q+1)}.$$

Тогава

$$\frac{p}{(p+1)(q+1)} \ge \frac{p(\beta-1)}{(ap+1)(aq+1)-(p+1)(q+1)}$$

или

$$(\beta - a^2)pq + (\beta - a)(p + q) + \beta - 1 \le 0$$

което е противоречие.

Оценяване. **5т.** Оцветяване. **2т.** За разсъждение, че всяка фигура покрива максимум едно оцветено. **3т.** За довършване.

Задача 6. Да се намерят всички двойки от естествени числа $(n; k)$, за които числото $x^n + 1$ се дели на kn^2 за всяко естествено $x > 1$, удовлетворяващо $(x, n) = 1$.

Решение. **Отговор.** $(n; k) = (1; 1)$**.**

Да допуснем, че за някое $n > 1$ съществува естествено k, за което условието на задачата е изпълнено. Нека p е най-малкият прост делител на n и нека $x_0 = n + 1$. Ясно е, че $(n, n + 1) = 1$. Ако $p = 2$, то kn^2 се дели на 4, откъдето $x_0^n + 1$ се дели на 4. Така $x_0^n \equiv 3 \pmod 4$. Но понеже n е четно, то x_0^n е точен квадрат. Не съществува точен квадрат, който дава остатък 3 при деление на 4. Следователно $p > 2$. Тогава $x_0^n \equiv -1 \pmod p$, откъдето $x_0^{2n} \equiv 1 \pmod p$. От Теоремата на Ферма следва сравнението $x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Нека m е показателят на x_0 по модул p. Тогава m дели $(2n, p-1)$. Нека $d = (2n, p-1)$. Ако $(n, p-1) > 1$, то съществува просто q, което дели n и $p - 1$. Но $q \leq p - 1 < p$. Това е противоречие, защото q е по-малък прост делител на n от p, което е невъзможно. Тогава $d = (2n, p-1) = (2, p-1) = 2$. Оттук следва, че m дели 2. Имаме два случая.

Първи случай. $m = 1$. Тогава $x_0 \equiv 1 \pmod p$, откъдето $x_0^n \equiv 1 \pmod p$. От друга страна $x_0^n \equiv -1 \pmod p$ и така $1 \equiv -1 \pmod p$, откъдето $p = 2$, противоречие.

Втори случай. $m = 2$. Тогава $x_0 \equiv -1 \pmod p$. Заместваме $x_0 = n + 1$ и получаваме $n + 1 \equiv -1 \pmod p$. Понеже $n \equiv 0 \pmod p$, то $1 \equiv -1 \pmod p$, което дава $p = 2$, противоречие.

Във всички случаи имаме противоречие с допускането.

Така остава да разгледаме случая $n = 1$, при който k дели $x + 1$ за всяко x. Нека $x = k$ – тогава $k + 1$ се дели на k и така $k = 1$. Директна проверка показва, че при $(n; k) = (1; 1)$ условието е изпълнено.

Оценяване. Избор на p – **2 точки**; Твърдение, че p е нечетно – **2 точкг**; Разглеждане на показател – **1 точка**; Намиране на показателя – **5 точки**; Отговор – **0 точки**;.