СОФИЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА "ЗА ТОРТАТА НА ДИРЕКТОРА"

ТЕМА ПО **МАТЕМАТИКА**
10 и 11 КЛАС

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$ и описаната му окръжност k. Ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича k в точка $T \neq A$. Точките M и N са средите на AB и AC съответно. Описаните окръжности около $\triangle ATM$ и $\triangle ATN$ пресичат симетралите на страните AC и AB съответно в точки X и Y, като X и Y са от вътрешността на $\triangle ABC$.
а) Да се докаже, че $NY \parallel AT$
б) Ако правите MN и XY се пресичат в K, то да се докаже, че $KA = KT$.

Задача 2. Една редица от естествени числа $a_1, a_2, ..., a_n$ ще наричаме *директорска* ако $a_1 + a_2 + ... + a_n = 3n$ и за всяко $1 \leq k \leq n-1$ сумата на всеки k члена на редицата не се дели на n. Да се намерят всички *директорски* редици.

Задача 3. Даден е кръг, в който са построени $n \in \mathbb{N}$ диаметъра, които го разделят на $2n$ еднакви сектора. Половината от секторите са оцветени в син цвят, а другата половина - в червен. Червените сектори са номерирани последователно с числата от 1 до n по часовниковата стрелка, като номерацията започва от произволен червен сектор. Сините сектори са номерирани със същите числа по посока, обратна на часовниковата стрелка, като номерацията започва от произволен син сектор. Да се докаже, че във всяка една конфигурация съществува полукръг, съдържащ числата от 1 до n.

Задача 4. Дадена е окръжност k и фиксирана хорда AB в нея, която не е диаметър. Точката M е средата на па-малката дъга $\widehat{AB}$. Точката C е от голямата дъга $\widehat{AB}$. Допирателната към k в C пресича допирателните към k в точките A и B съответно в точките P и Q съответно. Правите MP и MQ пресичат AB в точките R и S съответно. Да се докаже, че дължината на отсечката RS не зависи от избора на точка C.

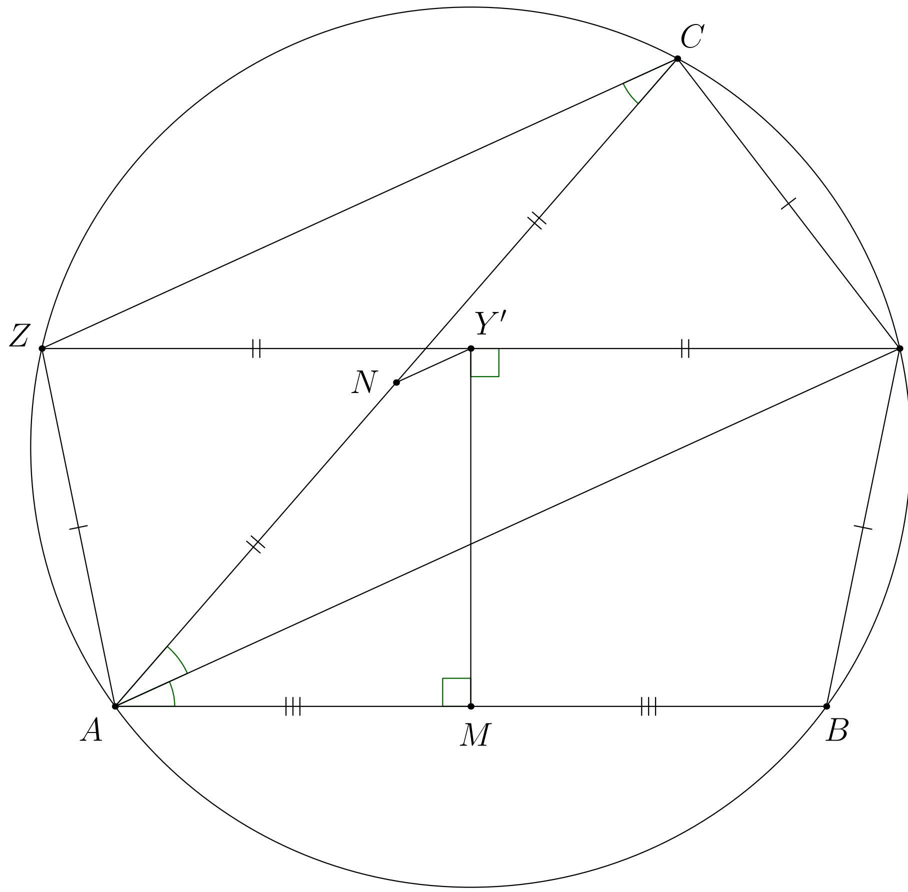
Задача 5. Дадени са естествените числа x и y.
Да се докаже, че числото $A = x^2 + xy + y^2$ винаги завършва на четен брой нули.

Задача 6. Дадено е $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, за които $f(0) = 0$ и $f(n) = 1 + f\left(\left[\dfrac{n}{k}\right]\right)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Журито ви пожелава Успех!

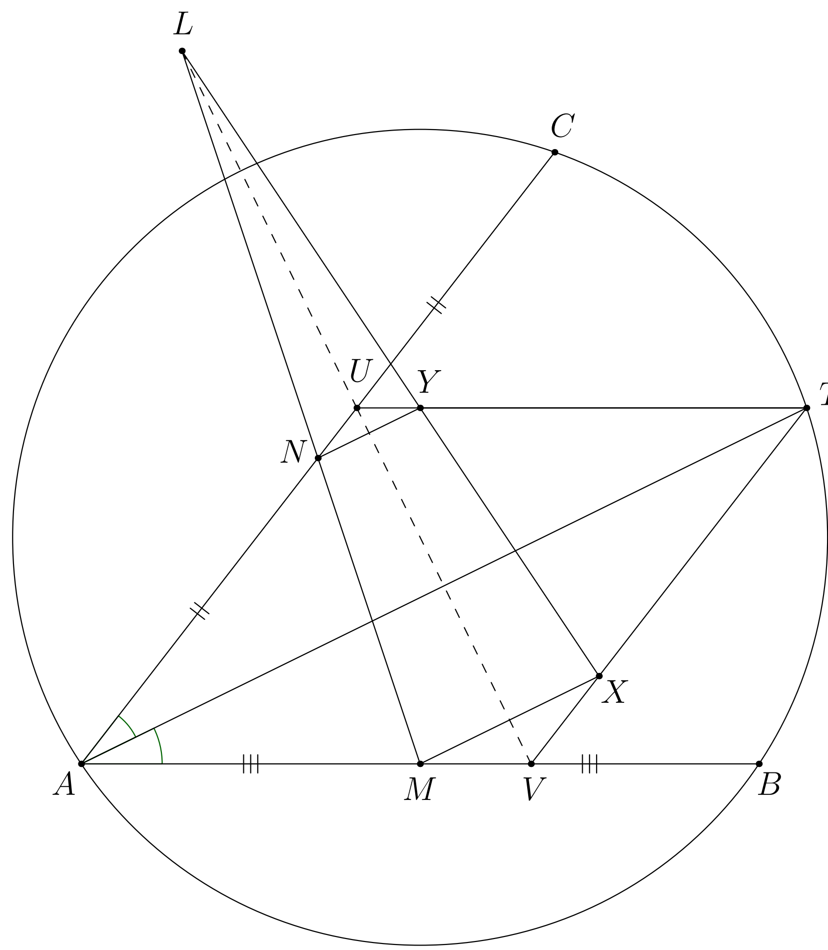
РЕШЕНИЯ:

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$ и описаната му окръжност k. Ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича k в точка $T \neq A$. Точките M и N са средите на AB и AC съответно. Описаните окръжности около $\triangle ATM$ и $\triangle ATN$ пресичат симетралите на страните AC и AB съответно в точки X и Y, като X и Y са от вътрешността на $\triangle ABC$.
а) Да се докаже, че $NY \parallel AT$
б) Ако правите MN и XY се пресичат в K, то да се докаже, че $KA = KT$.



Решение а). Достатъчно е да докажем, че $TY \parallel AB$. Наистина, тогава $\angle NAT = \angle BAT = \angle ATY$ и от вписаността на $ATYN$ следва $NY \parallel AT$.
Нека построим права l, минаваща през T, която е успоредна на AB. Нека тази права пресича симатралата на AB и окръжността k в точки Y' и Z. Очевидно е, че $ABTZ$ е трапец, вписан в окръжност. Тогава $AZ = BT$, но $BT = CT$, понеже T е среда на $\widehat{BC}$. Тогава $AZ = CT$, откъдето следва, че $\widehat{AZ} = \widehat{CT}$. От последното равенство заключаваме, че $\angle TAC = \angle ZCA$ и оттук получаваме, че $AT \parallel ZC$. Четириъгълникът $ATCZ$ е трапец, който е вписан в окръжност. Следователно този трапец е равнобедрен. Тогава $AC = ZT$, като диагонали в равнобедрен трапец. Да се върнем на равнобедрения трапец $ABTZ$. Знаем, че MY' е симетрала на AB и от съображения за симетрия следва, че MY' е симетрала и на ZT. Тогава Y' е среда на ZT. Но N е среда на AC. Тогава точките N и Y' лежат на средната отсечка на трапеца $ATCZ$, което означава, че $NY' \parallel AT$ и четириъгълник $ATY'N$ е трапец. Освен това

от равенството $AC = ZT$ следва $AN = TY$. Тогава $ATY'N$ е равнобедрен трапец. Следователно този четириъгълник е вписан в окръжност. Тогава Y' е пресечна точка на описаната окръжност около $\triangle ANT$ и симетралата на AB. Освен това Y' не може да съвпада с пресечната точка на описаната около $\triangle ANT$ окръжност и симетралата на AB, която е различна от Y. Следователно $Y' \equiv Y$ и тогава получаваме исканото.



Решение б). От предходната подточка имаме резултат $NY \parallel AT$. Аналогично се извежда и $MX \parallel AT$. Нека $AN \cap TY = U$ и $AM \cap TX = V$. От предната подточка знаем, че $TY \parallel AB$ и аналогично имаме $TX \parallel AC$. Тогава фигурата $AVTU$ е успоредник. Нещо повече, този успоредник е ромб, защото диагоналът AT разполовява $\angle VAU$. Освен това, да забележим, че триъгълниците $\triangle NYU$ и $\triangle XMV$ са хомотетични т.е. страните им лежат на ъгли с взаимноуспоредни рамене. Тогава MN, UV и XY се пресичат в една точка. Следователно $K \in UV$. Но очевидно UV е симетрала на AT. Тогава исканото твърдение е доказано!

Оценавяне а). Идея за доказване на $TY \parallel AB$ - **1 точка**; Построяване на точка Y' - **2 точки**; Доказателство, че $Y \equiv Y'$ - **4 точки**.

Оценяване б). Извод, че $MX \parallel AT$ - **1 точка**; Резултат, че $\triangle NYU$ е хомотетичен на $\triangle MVX$ - **1 точка**; Довършване - **1 точка**.

Задача 2. Една редица от естествени числа $a_1, a_2, ..., a_n$ ще наричаме *директорска* ако $a_1+a_2+...+a_n = 3n$ и за всяко $1 \leq k \leq n-1$ сумата на всеки k члена на редицата не се дели на n. Да се намерят всички *директорски* редици.

Решение. Нека $S_i = a_1 + a_2 + ... + a_i$ за всяко $1 \leq i \leq n-1$.
Нека $S'_1 = a_2$ и $S'_i = S_i$ за всяко $2 \leq i \leq n-1$.
Разглеждаме числата S_i. Ако измежду тях има две, които дават равни остатъци при деление на n, то разликата на две такива числа ще представлява сбор на k числа, където $1 \leq k \leq n-1$ и този сбор ще се дели на n, което е невъзможно. Тогава множеството $M = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ образува пълна система от ненулеви остатъци по модул n. Аналогично $N = \{S'_1, S'_2, ..., S'_n\}$ образуват пълна система ненулеви остатъци по модул n. Това означава, че $S_1 \equiv S'_1 \pmod{n}$, тъй като $S_i = S_i$' за $2 \leq i \leq n$. Това означава, че $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$ и аналогично $a_i \equiv a_j \pmod{n}$ за всеки две $i, j = 1, 2...n$. Следователно $a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_n \pmod{n}$. Нека сега $a_i = nt_i + r$, където $t_i \in \mathbb{N}_0$ и $0 < r < n$. Тогава $a_1 + a_2 + ... + a_n = 3n$ е еквивалентно на равенството $n(t_1 + t_2 + ... + t_n) + nr = 3n$. Така получаваме, че $t_1 + t_2 + ... + t_n + r = 3$. Ясно е, че $n \leq 3$. Сега остава да разгледаме три случая за r, а именно $r = 1, 2, 3$. БОО $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$. След разглеждане поотделно на случаите получаваме, че всички директорски редици са:

$$(1, 1, ..., 1, 2n + 1); (1, 1, ..., 1, t + 1, t + 1); (2, 2, ..., 2, n + 2); (3, 3, ..., 3, 3),$$

като последната редица е решение само когато $(3, n) = 1$, а втората, когато $(2, n) = 1$.

Оценяване. За използване на сумите S_i - **2 точки**; За аргумента, че тези суми дават различни остатъци по модул n - **2 точки**; Резултат $a_i \equiv a_j \pmod{n}$ - **3 точки**; Отговор - **3 точки**.

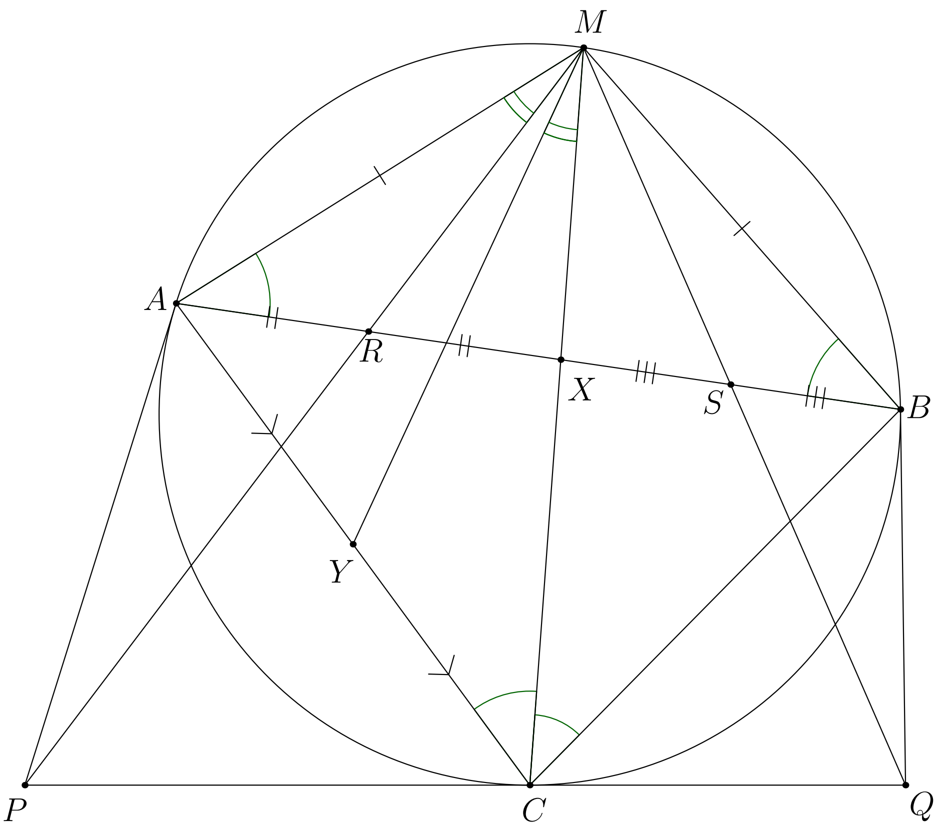
Задача 3. Даден е кръг, в който са построени $n \in \mathbb{N}$ диаметъра, които го разделят на $2n$ еднакви сектора. Половината от секторите са оцветени в син цвят, а другата половина - в червен. Червените сектори са номерирани последователно с числата от 1 до n по часовниковата стрелка, като номерацията започва от произволен червен сектор. Сините сектори са номерирани със същите числа по посока, обратна на часовниковата стрелка, като номерацията започва от произволен син сектор. Да се докаже, че във всяка една конфигурация съществува полукръг, съдържащ числата от 1 до n.

Решение. Да разгледаме прозволен полукръг. "Стъпка" ще наричаме изместване на полукръга с един сектор по посока на часовниковата стрелка (махаме първия сектор от полукръга и добавяме първия извън него (броейки по посока на часовниковата стрелка)). На всеки полукръг ще съпоставим двойка числа $(a; b)$ така, че a е равно на първото от червените (броейки по посока на часовниковата стрелка) и b - на първото от сините (ако от единия цвят няма числа задачата е решена защото в този полукръг се среща всяко число от 1 до n). На всяка стъпка правим точно едно от следните неща: увеличаваме първото число от двойката с 1 (a става $a + 1 \pmod{n}$) или намаляваме второто число от двойката (b става $b - 1 \pmod{n}$. Следователно на всяка стъпка увеличаваме $a - b$ с $1 \pmod{n}$, откъдето следва, че след $n - 1$ стъпки ще е имало ситуация при която $a - b \equiv 1 \pmod{n}$. Тогава в този полукръг ще има

k числа започващи от a, всяко от които е с 1 по-голямо от предишното по модул n и $n-k$ числа започващи от $b \equiv a-1 \pmod{n}$, всяко от които е с 1 по-малко от предишното отново по модул n. Следователно в този полукръг ще се среща всяко от числата от 1 до n.

Оценяване. Разглеждане на полукръговете и двойките $(a;b)$ - **2 точки**; Разглеждане на промяната на двойката $(a;b)$ след прилагане на "стъпка" - **1 точка**. Разглеждане на $a-b \pmod{n}$ след прилагане на "стъпка" и показване, че $a-b \equiv 1 \pmod{n}$ след достатъчен брой "стъпки" - **4 точки**; Завършване - **3 точки**.

Задача 4. Дадена е окръжност k и фиксирана хорда AB в нея, която не е диаметър. Точката M е средата на па-малката дъга $\widehat{AB}$. Точката C е от голямата дъга $\widehat{AB}$. Допирателната към k в C пресича допирателните към k в точките A и B съответно в точките P и Q съответно. Правите MP и MQ пресичат AB в точките R и S съответно. Да се докаже, че дължината на отсечката RS не зависи от избора на точка C.



Решение. Нека $CM \cap AB = X$. Понеже M е среда на $\widehat{AB}$, то $\widehat{AM} = \widehat{AB}$. Следователно $\angle MAB = \angle MCB$. Сега да забележим, че $\triangle AMX \sim \triangle CMA$ понеже $\angle AMX = \angle CMA$ и $\angle XAM = \angle ACM$. Тогава $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{AX}{CA}$. Нека с Y означим средата на AC. Разглеждаме $\triangle ACM$, в който правите MY и MP са съответно медиана и симедиана. Така получаваме $\angle AMP = \angle CMY$. Оттук следва, че $\triangle AMR \sim \triangle CMY$. Тогава получаваме $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{AR}{CY}$, но $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{AX}{CA}$, откъдето следва $\dfrac{AR}{CY} = \dfrac{AX}{CA}$. Последното равенство е еквивалентно на $\frac{AR}{AX} = \frac{CY}{CA}$, но $\frac{CY}{CA} = \frac{1}{2}$. Тогава $\frac{AR}{AX} = \frac{1}{2}$ и получаваме, че R е среда на AX. Аналогично S е среда на BX.

Тогава $RS = RX + XS = \frac{AX + BX}{2} = \frac{AB}{2}$. Но дължината на AB не зависи от избора на C, откъдето следва и твърдението на задачата!

Оценяване. Построяване на точката X - **2 точки**; Подобие $\triangle AMX \sim \triangle CMA$ - **3 точки**; Построяване на точка Y - **3 точки**; Извод, че R е среда на AX - **1 точка**; Довършване - **1 точка**.

Задача 5. Дадени са естествените числа x и y.
Да се докаже, че числото $A = x^2 + xy + y^2$ винаги завършва на четен брой нули.

Решение. Ще започнем с тривиалното твърдение, че ако A не се дели на 10, то завършва на четен брой нули - 0. Нека сега A се дели на 10. Ще докажем, че ако 10 дели A, то 10 дели x и y поотделно.

Нека 2 дели x^2+xy+y^2 за $x, y \in \mathbb{N}$. Очевидно не е възможно x и y да са едновременно нечетни, понеже тогава A е нечетно и 2 не може да го дели. Тогава 2 дели поне едно от x и y. БОО 2 дели x. Следователно $2|y^2$, откъдето следва, че $2|y$. Тоест, ако 2 дели A, задължително $2|(x, y)$.

Сега нека 5 дели $x^2 + xy + y^2$ за $x, y \in \mathbb{N}$. Ясно е, че ако 5 дели едното от x и y, то 5 дели и другото. Да допуснем, че 5 не дели x. Тогава и y не се дели на 5. Следователно $(x, 5) = (y, 5) = 1$. Прилагаме два пъти Малката теорема на Ферма и получаваме, че $x^4 \equiv 1 \pmod 5$ и $y^4 \equiv 1 \pmod 5$, откъдето следва, че $x^4 \equiv y^4 \pmod 5$. Но от друга страна $5|x^2 + xy + y^2$, което ни дава $5|x^3 - y^3$. Така получаваме $x^3 \equiv y^3 \pmod 5$. Последното сравнение ни дава $x^4 \equiv xy^3 \pmod 5$, но $x^4 \equiv y^4 \pmod 5$, откъдето получаваме, че $xy^3 \equiv y^4 \pmod 5$. Но ние знаем, че $(5, y) = 1$, което означава, че $(5, y^3) = 1$. Тогава последното сравнение е равносилно на $x \equiv y \pmod 5$. Тогава $0 \equiv x^2 + xy + y^2 \equiv 3x^2 \pmod 5$, откъдето следва, че $5|3y^2$. Тогава 5 дели y и получаваме противоречие. Следователно ако $5|x^2+xy+y^2$, то 5 дели x и y поотделно.

Стигнахме до извода, че ако 10 дели A, то 10 дели x и y поотделно. Тогава твърдението на задачата е очевидно!

Оценяване. Доказателство, че ако 2 дели израза, то 2 дели и двете числа - **3 точки**; Доказателство, че ако 5 дели израза, то 5 дели и двете числа - **5 точки**; Завършване на задачата - **2 точки**.

Задача 6. Дадено е $2 \le k \in \mathbb{N}$. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, за които $f(0) = 0$ и $f(n) = 1 + f\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Решение. При $n = 1$, получаваме $f(1) = 1 + f\left(\left[\frac{1}{k}\right]\right) = 1 + 0 = 1$. Аналогично получаваме, че $f(n) = 1$ за всяко $0 < n < k$, защото $\left[\frac{n}{k}\right] = 0$ за $0 < n < k$. Ще докажем, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ имаме $f(n) = \left[\log_k n\right] + 1$. За целта ще използваме индукция по $\left[\log_k n\right]$.

- База: Както видяхме, условието е изпълнено за всики естествени числа в интервала $[1; k-1]$. Тогава $\left[\log_k n\right] = 0$. Понеже $k \geq 2$, такива естествени числа съществуват и базата е налице.

- Индукционно предположение: Нека сега $f(n) = m + 1$ е изпълнено за естествените числа n, за които $\left[\log_k n\right] = m$, където $m \in \mathbb{N}_0$.

- Стъпка: Нека $n_0 \in \mathbb{N}$, за което $\left[\log_k n_0\right] = m + 1$. Тогава $\left[\log_k \left[\frac{n_0}{k}\right]\right] = m$. Но от условието $f(n_0) = 1 + f\left(\left[\frac{n_0}{k}\right]\right)$. Съгласно индукционното предположение $f\left(\left[\frac{n_0}{k}\right]\right) = 1 + \left[\log_k \left[\frac{n_0}{k}\right]\right] = m + 1$ и тогава $f(n_0) = m + 2 = \left[\log_k n_0\right] + 1$. Така доказахме и индукционната стъпка.

  Заключваме, че $f(n) = \left[\log_k n\right] + 1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $f(0) = 0$.

  Оценяване. Идея за индукция - **1 точка**; База на индукцията - **2 точки**; Завършване на индукцията - **6 точки**; Извеждане на f в явен вид - **1 точка**; Частични субституции, които са съществени за решението, се оценяват с до **2 точки**.