СОФИЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

ТУРНИР ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА "ЗА ТОРТАТА НА ДИРЕКТОРА"

ТЕМА ПО **МАТЕМАТИКА**
9 КЛАС

Задача 1. Да се докаже, че не съществува двойка от рационални числа $(x; y)$, удовлетворяващи едновременно $y^2 = x^3 + 3x + 2$ и $x^2 = y^3 + 3y + 2$.

Задача 2. Дадена е дъска 8 x 8, като 10 от полетата ѝ са маркирани. Да се докаже, че измежду маркираните полета съществуват две, за които минималния брой ходове, за които *шахматен кон* може да стигне от едното до другото е не по-малко от 3.

Задача 3. Даден е граф G с краен брой върхове. Известно е, че от всеки връх излизат поне 2016 ребра. Да се докаже, че в графа има цикъл с дължина поне 2017.

Задача 4. Да се докаже неравенството $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{3}{a+2b} + \dfrac{3}{b+2c} + \dfrac{3}{c+2a}$, където a, b и c са положителни реални числа.

Задача 5. Да се реши в естествени числа уравнението $2^n - m^3 = m^2 - 16$.

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$, в който M, N и P са средите на страните AB, BC и CA съответно. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност допира страните AB и AC съответно в точките E и F. Правите NM и NP пресичат правата EF в точките V и U съответно. Да се докаже, че правите BU и CV се пресичат върху ъглополовящата на $\angle BAC$.

Журито ви пожелава Успех!

РЕШЕНИЯ:

Задача 1. Да се докаже, че не съществува двойка от рационални числа $(x;y)$, удовлетворяващи едновременно $y^2 = x^3 + 3x + 2$ и $x^2 = y^3 + 3y + 2$.

Първо решение. Да допуснем, че съществуват рационални числа x и y, които изпълняват условието на задачата. Нека $x = \dfrac{a}{b}$ и $y = \dfrac{c}{d}$, където $a, c \in \mathbb{Z}$ и $b, d \in \mathbb{N}$ и изпълняват условието $(a,b) = (c,d) = 1$. Да заместим в първото уравнение от условието. Получаваме

$$\frac{c^2}{d^2} = \frac{a^3}{b^3} + \frac{3a}{b} + 2 \Leftrightarrow (*) c^2b^3 = a^3d^2 + 3ab^2d^2 + 2b^3d^2.$$

Сега да забележим, че b^2 дели $c^2b^3, 3ab^2d^2$ и $2b^3d^2$, откъдето следва, че b^2 дели a^3d^2 и понеже $(a,b) = 1$, то получаваме, че $b^2|d^2$, откъдето следва, че $b|d$. Да забележим, че второто уравнение от условието е симетрично на първото. Тоест b и d са симетрични относно двете уравнения. Следователно второто уравнение ни дава $b|d$. Понеже $b, d \in \mathbb{N}$ и $b|d$ и $d|b$, то следва, че $b = d$. Заместваме d с b в $(*)$ и получаваме $c^2b^3 = a^3b^2 + 3ab^4 + 2b^5$. Да зебележим, че $b^3|a^3b^2$, което означава, че $b|a^3$, но понеже $(a,b) = 1$, то $(a^3, b) = 1$. Следователно $b = \pm 1$, но $b \in \mathbb{N}$. Следователно $b = 1$, откъдето следва и $d = 1$. Тоест ако съществуват рационални x и y, които изпълняват условието, то те са цели. С помощта на индукция се доказва, че за всяко цяло $m < 0$, изразът $m^3 + 3m + 2$ е отрицателен. Но понеже $x^3 + 3x + 2 = y^2 \geq 0$, то получаваме, че x трябва да бъде цяло неотрицателно число. Аналогично получаваме и за y. Очевидно ако $x = y$, получаваме противоречие. БОО $x > y$, откъдето следва, че $x^2 > y^2 = x^3 + 3x + 2 > x^3$, откъдето следва, че $x < 1$. Тогава $x = 0$. Но при $x = 0$ имаме $y < 0$, противоречие.

Оценяване. Резултат $d|b$ - **3 точки**; Аналогия за $b|d$ -**1 точка**; Заключение $b = d$ - **1 точка**; Свеждане до цели числа - **2 точки**; Довършване - **3 точки**.

Второ решение. Да допуснем противното. Понеже полиномът $x^3 - x^2 + 3x + 2$ няма рационални корени, имаме $x \neq y$. Полагаме $s = x + y$ и $p = xy$. Събирането на двете уравнения дава $s^2 - 2p = s^3 - 3sp + 3s + 4 \Leftrightarrow p = \dfrac{s^3 - s^2 + 3s + 4}{3s - 2}$ Важно е да се отбележи, че $s = \dfrac{2}{3}$ не анулира $s^3 - s^2 + 3s + 4$. Изваждаме двете уравнения и разделяме на полученото на $x - y \neq 0$. Получаваме $-s = s^2 - p + 3 \Leftrightarrow p = s^2 + s + 3$. Така $\dfrac{s^3 - s^2 + 3s + 4}{3s - 2} = s^2 + s + 3 \Leftrightarrow s^3 + s^2 + 2s - 5 = 0$. Последното няма рационални корени, противоречие.

Оценяване. Случай $x = y$ - **1 точка**; Идея за симетрични полиноми - **1 точка**; Едно изразяване на едната променлива чрез другата - **2 точки**(С общо **5 точки** за две такива; отнема се по **1 точка** за всяко деление на израз на s или p, ако не е обосновано защо не се дели на 0); Приравняване и довършване - **3 точки**.

Задача 2. Дадена е дъска 8 х 8, като 10 от полетата ѝ са маркирани. Да се докаже, че измежду маркираните полета съществуват две, за които минималния брой ходове, за които *шахматен кон* може да стигне от едното до другото е не по-малко от 3.

Решение. Да допуснем противното (От всяко маркирано поле до всяко друго се стига с не повече 2 хода на коня). Следователно, няма две маркирани полета на разстояние над 4 полета хоризонтално или вертикално, откъдето следва, че всички полета са в се съдържат в квадрат 5 x 5. Да разположим квадрата 5 x 5 така че в най-горния му ред да има маркирано поле. Нека едно от маркираните полета на най-горния ред е полето "X". С "0" ще означим полетата до които не може да се стигне с до 2 хода на коня от полето "X", а останалите полета ще съдържат естествени числа, като две клетки ще имат еднакви числа ако от едната не може да се стигне до другата с до 2 хода на коня. Да разгледаме петте случая относно позицията на полето "X" в квадрата 5 x 5.

1 случай				
X	0	1	0	6
0	3	4	2	0
1	5	0	0	5
0	2	0	3	0
6	0	4	0	0

2 случай				
0	X	0	7	0
1	0	2	3	6
5	4	8	0	0
2	0	1	0	5
0	3	0	4	0

3 случай				
1	0	X	0	7
6	3	0	2	7
0	5	1	4	0
0	2	0	3	0
4	0	6	0	5

Четвърти и пети случай са аналогични (симетрични) на втори и първи. В трите случая, освен "X" има най-много още 8 маркирани полета. Следователно общо има най-много 9 маркирани полета. Следва противоречие с допускането, че от всяко маркирано поле до всяко друго може да се стигне с до 2 хода на коня.

Оценяване. Съображение, че всички маркирани полета са разположени в квадрат 5 x 5 - **3 точки**; Разглеждане на случаи за разположение на кон на най-горен ред - **3 точки**; Доказателство, че максималния брой маркирани полета за всеки случай е 9 - **4 точки**.

Задача 3. Даден е граф G с краен брой върхове. Известно е, че от всеки връх излизат поне 2016 ребра. Да се докаже, че в графа има цикъл с дължина поне 2017.

Решение. Да разгледаме най-дългия път в граф G, преминаващ през връх по не повече от веднъж. Нека върховете в този път са V_1, V_2, V_3, ... V_n. Да допуснем, че V_1 има съсед U, такъв че $U \neq V_i$ за всяко $i \in [2; n]$. Тогава ще съществува път U, V_1, V_2, ... V_n, който е по-дълъг от максималния, следователно има противоречие. Това значи че всеки от съседите на V_1 е един от V_i за $i \in [2; n]$. Тъй като V_1 има поне 2016 съседа, това значи че най-голямото k за което V_k е съсед на V_1 е ≥ 2017. Следователно има цикъл V_1, V_2, ... V_{k-1} V_k, V_1, който съдържа поне 2017 върха.

Оценяване. Разглеждане на най-дългия път - **6 точки**; Довършване - **4 точки**; При нерешена задача: Доказателство че във всеки граф с върхове от степен поне 2 има цикъл - **1 точка**; Идея за избор на някакъв екстремален елемент - **2 точки**.

Задача 4. Да се докаже неравенството $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{3}{a+2b} + \dfrac{3}{b+2c} + \dfrac{3}{c+2a}$, където a, b и c са положителни реални числа.

Решение. Прилагаме неравенството между средно аритметично и средно хармонично по следния начин: $\dfrac{a+b+b}{3} \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}}$. Последното равенство е равносилно на $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{9}{a+2b}$. Аналогично $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{b+2c}$ и $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{9}{c+2a}$.
Сега сумираме почленно последните три неравенства и получаваме:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a} \geq \frac{9}{a+2b}+\frac{9}{b+2c}+\frac{9}{c+2a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c} \geq \frac{9}{a+2b}+\frac{9}{b+2c}+\frac{9}{c+2a} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{a+2b}+\frac{3}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}.$$

С това неравенството е доказано. Равенство се достига когато $a=b=c$.

Оценяване. Подходящо групиране - **4 точки**; Прилагане на подходящо неравенство(САСХ или Хубаво неравенство) - **4 точки**; Довършване на решението - **2 точки**; Опити за прилагане на неравенства между средни - **2 точки**. Привеждане под общ знаменател и разкриване на скоби - **2 точки**; Довършване на решението с разкриване на скоби - **8 точки**(като **2 точки** от тях са за правилно групиране).

Задача 5. Да се реши в естествени числа уравнението $2^n - m^3 = m^2 - 16$.

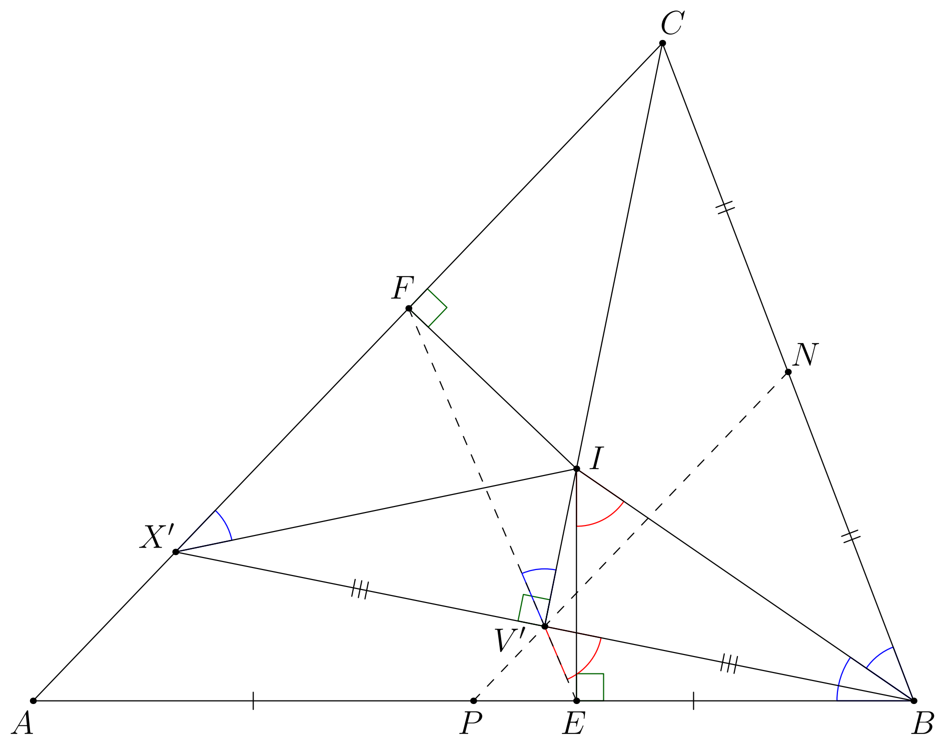
Решение. Да запишем уравнението във вида $2^n = m^3 + m^2 - 16$. Разглеждаме остатъците на израза $m^3 + m^2 - 16$ при деление на 7. Разглеждайки случаите $m \equiv 1,2,3,4,5,6,0 \pmod 7$, получаваме съответно $m^3+m^2-16 \equiv 0,3,6,1,1,5,5$. Числата от вида 2^n дават остатъци 1,2,4 при деление на 7. За да е изпълнено равенството $2^n = m^3 + m^2 - 16$, то двете му страни трябва да дават остатък 1 при деление на 7. Но това означава, че $2^n \equiv 1 \pmod 7$. Следователно $3|n$ и тогава съществува естествено k такова, че $2^n = k^3$. Остава да решим уравнението $k^3 = m^3 + m^2 - 16$. Очевидно $(m+1)^3 > k^3 = m^3 + m^2 - 16$. Ако $m > 4$, то $k^3 = m^3 + m^2 - 16 > m^3$ и тогава $(m+1)^3 > k^3 > m^3$, което е невъзможно. Остава да направим проверките за $m = 1,2,3,4$. Числото $m^3 + m^2 - 16$ е точен куб на естествено число само за $m = 4$. Така получаваме единственото решение на задачата $(n;m) = (6;4)$.

Оценяване. Разглеждане по модул 7 - **2 точки**; Доказателство, че n се дели на 3 - **2 точки**; Заключване между точни кубове - **4 точки**; Проверки - **1 точка**; Извеждане на решенията - **1 точка**; Оценки по други модули се оценяват с до **2 точки**; При непълно решена задача, разглеждане във вида $2^n + 16 = m^2(m+1)$ и изследване на делимости се оценяват с до **2 точки**.

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$, в който M, N и P са средите на страните AB, BC и CA съответно. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност допира страните AB и AC съответно в точките E и F. Правите NM и NP пресичат правата EF в точките V и U съответно. Да се докаже, че правите BU и CV се пресичат върху ъглополовящата на $\angle BAC$.

Решение. Ще докажем, че центърът на вписаната окръжност I лежи на правата CV, откъдето аналогично ще последва, че I лежи и на правата BU. Нека $BV \cap AC = X$.

В $\triangle XBC$ имаме $NV \parallel XC$ и N е среда на BC. Тогава NV е средна отсечка в $\triangle XBC$ и $XV = VB$. Сега да забележим, че C, I и V лежат на една права, то $\angle BVC = 90°$. С други думи, ако условието на задачата е вярно, то V съвпада с проекцията на B върху CI. Нека $V' \in CI$ и $BV' \perp CI$. Ще покажем, че V' съвпада с пресечната точка на MN и EF. Ясно е, че ако $BV' \cap AC = X'$, то NV' е средна отсечка в $\triangle BX'C$. Тогава $NV' \parallel AC \parallel NM$, откъдето V' лежи на правата MN. Сега остава да докажем, че V' лежи на правата EF. Понеже $\angle X'V'I = \angle X'FI = 90°$ и $\angle IV'B = \angle AEB = 90°$, то следва, че $X'V'IF$ $IV'EB$ са вписани. Тогава $\angle IX'F = \angle IV'F$. От съображения за симетрия относно правата CI, имаме $\angle IX'C = \angle IBC$. С други думи $\angle IV'F = \angle IBC = \angle IBE$. Освен това $\angle EIB = \angle EV'B$. Следователно $\angle IV'F + \angle EV'B = \angle IBE + \angle EIB = 90°$. Тогава $\angle EV'B + \angle BV'I + \angle IV'F = 180°$, което дава резултат, че E, V' и F лежат на една права. Тогава $V' = EF \cap PN = V$. Тоест $V' \equiv V$. Следователно C, I и V лежат на една права. Аналогично B, I и U също лежат на една права. С това първата част от задачата е доказана.



Оценяване. Хипотеза, че правите минават през I - **2 точки**; Твърдение, че V лежи на средната отсечка, успоредна на AC - **2 точки**; Идея за единствеността на проекцията на B върху CI - **2 точки**; 3 т. за Реализация на единствеността (V' лежи на EF) - **3 точка**; Довършване - **1 точка**.